UNIVERSITÉ MONTPELLIER II **Année 2014-2015**

Calculus

Contrôle continu 2

Exercice 1 (Nombres complexes)

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$iz^3 + (3+2i)z + 1 - 3i = 0$$

1. Montrer que i est solution de (E).
2. Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z :
$$iz^3 + (3+2i)z + 1 - 3i = (z-i)(az^2 + bz + c).$$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') :
$$iz^2 - z + 3 + i = 0.$$
4. En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique. Donner, pour chaque solution, le module et (quand c'est faisable) un argument.

Exercice 2 (Nombres complexes)

On pose

$$C = \sum_{k=0}^{10} \cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right), \quad S = \sum_{k=0}^{10} \sin\left(\frac{2k\pi}{11}\right).$$

Calculer $C + iS$. En déduire C et S.

Exercice 3 (Primitives)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$. L'objectif est de trouver une primitive de cette fonction f.

1. Déterminer la dérivée f' de f.
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x, $\dfrac{1}{1+e^{-x}} = a + \dfrac{be^{-x}}{1+e^{-x}}$.
3. Calculer $f(x) - f'(x)$.
4. Déduire des questions précédentes une primitive F de f.

Exercice 4 (Calcul intégral)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx.$
2. $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x \, dx.$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^2+1} \, dx.$ INDICATION : division euclidienne.