# Traitement du Signal

## L3 méca, 2023-2024

**Dernière mise à jour : le 5 septembre 2023**

**Université de Rouen Normandie, LMRS**

**Matthieu Alfaro.**

**AVERTISSEMENT :**

Ce poly est un document en construction, qui contient sûrement quelques coquilles voire erreurs et ne demande qu'à s'améliorer.

Ce poly est incomplet et aride à la lecture seule. Il prend son sens une fois complété par les explications, les reformulations, les dessins, les preuves, les exemples donnés en cours, et les exercices traités.

D'autre part, des choix seront faits au cours du semestre : le poly est parfois "théorique" et on se concentrera sur les cas pratiques. Enfin, on ne fera pas tout.

Bref, ce poly n'est qu'un support...

Ce poly est librement inspiré de plusieurs cours préexistants, notamment celui de Jean-Baptiste Bardet que je remercie ici.

# Table des matières

# Chapitre 1

# UN PEU DE COMPLEXES

## 1.1 Ecriture algébrique

On rappelle que l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est

$$\mathbb{C} = \{a + ib : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}, \quad \text{où} \quad i^2 = -1.$$

**Définition 1.1.1.** *Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, on appelle :*

1. *$a$ la **partie réelle** de $z$, notée $\operatorname{Re} z$.*
2. *$b$ la **partie imaginaire** de $z$, notée $\operatorname{Im} z$.*
3. *$\overline{z} = a - ib$ le nombre complexe **conjugué** de $z$.*
4. *$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ le **module** de $z$.*
5. *Si $b = \operatorname{Im} z = 0$, $z = a$ est (identifié à) un nombre réel.*
6. *Si $a = \operatorname{Re} z = 0$, on dit que $z = ib$ est un nombre **imaginaire pur**. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.*

Les propriétés des opérations sur $\mathbb{R}$ se prolongent à $\mathbb{C}$ où on peut donc utiliser, entre autres, les identités remarquables, le binôme de Newton, les notations somme $\sum$ et produit $\prod$, les propriétés des puissances, etc.

**Exercice 1.1.2.** *Donner la forme algébrique des complexes suivants :*

$$z_1 = (2 + i)(3 - i), \quad z_2 = \frac{1}{1 - 2i}, \quad z_3 = (1 + i)^4.$$

## 1.2 Le plan complexe

**Définition 1.2.1.** *On identifie l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ au plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ en associant à tout nombre complexe $z = a+ib$ le point $M$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, i.e. $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$. On dit alors que $z$ est l'**affixe** de $M$. On appelle cette réalisation géométrique de $\mathbb{C}$ le **plan complexe**, et on remarque qu'on a alors identifié $\mathbb{R}$ avec l'axe des abscisses et $i\mathbb{R}$ avec l'axe des ordonnées*

**Proposition 1.2.2.** *Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et $M$ est le point d'affixe $z$ dans le plan complexe, alors*

1. *$\operatorname{Re} z = a$ est l'abscisse de $M$.*

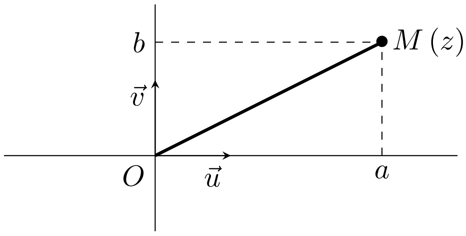


FIGURE 1.1 – Représentation graphique du point $M$ d'affixe $z = a + ib$.

2. $\operatorname{Im} z = b$ *est l'ordonnée de* $M$.
3. *Le point d'affixe* $\overline{z}$ *est le symétrique de* $M$ *par rapport à l'axe des abscisses.*
4. *Le point d'affixe* $-z$ *est le symétrique de* $M$ *par rapport à l'origine* $O$ *du repère.*
5. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *est la longueur du segment* $OM$*, c'est à dire la distance de* $M$ *à* $O$.

L'addition de deux complexes admet une interprétation géométrique dans le plan complexe :

**Proposition 1.2.3.** *Si* $z_1$ *et* $z_2$ *sont deux nombres complexes,* $M_1$ *et* $M_2$ *les deux points d'affixe respective* $z_1$ *et* $z_2$*, alors le point d'affixe* $z_1 + z_2$ *est le point* $N$ *tel que* $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ *(ou bien, de manière équivalente, tel que* $OM_1NM_2$ *soit un parallélogramme).*

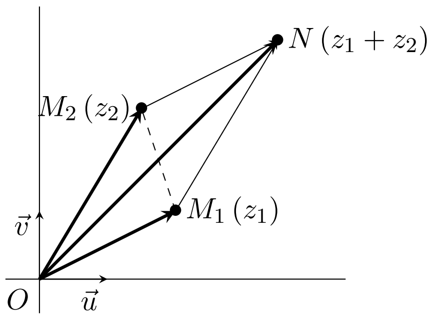


FIGURE 1.2 – Représentation graphique de l'addition de deux nombres complexes.

## 1.3 Propriétés du conjugué et du module

**Proposition 1.3.1.** *Pour tous nombres complexes* $z_1$ *et* $z_2$,

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ;
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$ ;
3. *si* $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ;
4. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ ;
5. *si* $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

**Proposition 1.3.2.** *Pour tout nombre complexe* $z$,

1. $\overline{\overline{z}} = z$ ;
2. $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$ *et* $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ ;
3. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$ ;

4. *Si* $z \in \mathbb{R}$*, le module coïncide avec la valeur absolue ;*
5. $z = 0$ *si et seulement si* $|z| = 0$ *;*
6. *Si* $z \neq 0$*,* $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$*, et* $\left|z^{-1}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ *;*
7. $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *et* $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$*.*

**Remarque 1.3.3.** *Attention, certains résultats valables pour la valeur absolue des nombres réels ne le sont plus pour le module des nombres complexes. Un exemple important apparaît ici : on sait que pour tout* $a \in \mathbb{R}$*,* $|a|^2 = a^2$ *; cette propriété est fausse pour les nombres complexes, et devient pour tout* $z \in \mathbb{C}$*,* $|z|^2 = z\overline{z}$*, qui est elle aussi très utile.*

**Proposition 1.3.4 (Inégalité triangulaire).** *Pour tous nombres complexes* $z_1$ *et* $z_2$*, on a*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

*Plus généralement, pour tous nombres complexes* $z_1, \ldots, z_n$*, on a*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

**Proposition 1.3.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).** *Soit* $n$ *un entier strictement positif,* $(z_k)_{1\leq k\leq n}$ *et* $(w_k)_{1\leq k\leq n}$ *deux familles de nombres complexes. Alors :*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\overline{w_k}\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \times \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2.$$

## 1.4 Écritures trigonométrique et exponentielle

### 1.4.1 L'ensemble des nombres complexes de module 1

**Définition 1.4.1.** *On note*

$$\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\right\}$$

***l'ensemble des nombres complexes de module 1****.*

Si $z \in \mathbb{U}$ alors, par définition,

$$(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = 1,$$

ce qui signifie aussi que le point $M$ du plan complexe d'affixe $z$ appartient au cercle unité du plan, c'est à dire au cercle trigonométrique. Par conséquent, si $\theta$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ (définie modulo $2\pi$), on a

$$\operatorname{Re} z = \cos\theta, \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} z = \sin\theta,$$

donc aussi

$$z = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Ainsi tout $z \in \mathbb{U}$ peut s'écrire sous cette forme.

**Définition 1.4.2** (Écritures trigonométrique et exponentielle, cas particulier de $z \in \mathbb{U}$)**.** *Pour tout* $z \in \mathbb{U}$*, on appelle l'écriture* $z = \cos\theta + i\sin\theta$ *obtenue ci-dessus l'****écriture trigonométrique*** *de* $z$*, et on dit que* $\theta$ *est un* ***argument*** *de* $z$*.*
*Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$*, on note aussi* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$*, et on appelle* $e^{i\theta}$ *l'****écriture exponentielle*** *de ce nombre complexe de module 1.*
*On a donc une description alternative de* $\mathbb{U}$ *:*

$$\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{e^{i\theta} : \theta \in ]-\pi;\pi]\right\}.$$

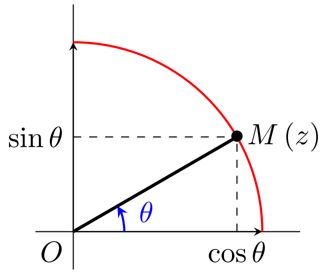


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de l'écriture trigonométrique de $z \in \mathbb{U}$.

Un angle n'étant pas déterminé de manière unique, mais seulement à "$2\pi$-près", on a

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \quad \text{ssi} \quad \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \varphi + 2k\pi,$$

aussi un complexe de module 1 admet une infinité d'arguments. On parlera donc de *un* argument.

**Remarque 1.4.3.** *Il est utile de donner tout de suite l'écriture exponentielle de quelques nombres complexes particuliers :*

$$e^{i0} = e^{2i\pi} = 1, \quad e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{-i\pi/2} = -i.$$

### 1.4.2 Propriétés fondamentales de l'exponentielle complexe

**Théorème 1.4.4** (Propriété fondamentale de l'exponentielle complexe)**.** *Pour tous nombres réels $\theta$ et $\varphi$,*

$$e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}\,. \tag{1.1}$$

*De plus, si $z = e^{i\theta}$, alors $z^{-1} = \overline{z} = e^{-i\theta}$.*

*Démonstration.* C'est une conséquence des formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned} \cos(\theta+\varphi) &= \cos\theta\cos(\varphi) - \sin\theta\sin(\varphi)\,; \\ \sin(\theta+\varphi) &= \sin\theta\cos(\varphi) + \cos\theta\sin(\varphi)\,. \end{aligned}$$

En effet, par définition, $e^{i(\theta+\varphi)} = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)$, alors que

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\varphi} &= \big(\cos\theta + i\sin\theta\big)\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big) \\ &= \big(\cos\theta\cos(\varphi) - \sin\theta\sin(\varphi)\big) + i\big(\sin\theta\cos(\varphi) + \cos\theta\sin(\varphi)\big)\,. \end{aligned}$$

Les deux formules de trigonométrie rappelées au début de la démonstration donnent (1.1). On avait déjà vu que pour $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$, $z^{-1} = \overline{z}$. On déduit de plus de la formule précédente que $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^{i0} = 1$, donc que $z^{-1} = e^{-i\theta}$. □

**Théorème 1.4.5 (Formule de Moivre).** *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\big(e^{i\theta}\big)^n = e^{in\theta}\,, \tag{1.2}$$

*ce qui s'écrit aussi*

$$\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\,. \tag{1.3}$$

Avec la formule du binôme, elle permet donc d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

**Application : développement de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ (via Moivre et Newton)**

Par exemple, pour $n = 3$, on a $e^{3i\theta} = \big(e^{i\theta}\big)^3$, ce qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) &= \big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^3\\ &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\big(i\sin\theta\big) + 3\cos\theta\big(i\sin\theta\big)^2 + \big(i\sin\theta\big)^3\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\big(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\big).\end{aligned}$$

En identifiant parties réelles et parties imaginaires, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\,;\\ \sin(3\theta) &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\,.\end{aligned}$$

Sur cet exemple, on peut faire encore mieux (mais ce ne sera pas toujours possible). En utilisant la formule fondamentale de la trigonométrie, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on peut écrire $\cos^3\theta$ comme un polynôme en $\cos\theta$ et $\sin^3\theta$ comme un polynôme en $\sin\theta$ :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta;\\ \sin(3\theta) &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\,.\end{aligned}$$

**Exercice 1.4.6.** *"Développer"* $\cos(4\theta)$ *et* $\sin(4\theta)$.

**Théorème 1.4.7 (Formules d'Euler).** *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$*,*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\,. \tag{1.4}$$

**Application : linéarisation de $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$ (via Euler et Newton)**

En prenant la puissance $n$-ième des formules (1.4), et en développant le terme de droite avec la formule du binôme, on pourra exprimer $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$ comme une combinaison linéaire des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$, avec $k \leq n$.
Par exemple, appliquons cette technique à $\sin^3\theta$ :

$$\begin{aligned}\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3\\ &= \frac{1}{(2i)^3}\big(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\big)^3\\ &= -\frac{1}{8i}\Big[\big(e^{i\theta}\big)^3 - 3\big(e^{i\theta}\big)^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\big(e^{-i\theta}\big)^2 - \big(e^{-i\theta}\big)^3\Big]\\ &= -\frac{1}{8i}\Big[e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3\big(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\big)\Big]\\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} - 3\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right]\\ &= \frac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4}\,,\end{aligned}$$

ce qui est très utile, par exemple, pour déterminer une primitive de la fonction $\theta \mapsto \sin^3\theta$...

**Exercice 1.4.8.** *Linéariser* $\cos^4\theta$ *et* $\sin^4\theta$.

### 1.4.3 Écritures trigonométrique et exponentielle des nombres complexes

**Proposition 1.4.9** (Écritures trigonométrique et exponentielle, cas général)**.**

1. *Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que*
$$z = r\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) = re^{i\theta}\,.$$
*On appelle la première expression l'**écriture trigonométrique** de $z$ et la seconde son **écriture exponentielle**.*
*Dans ces écritures, on a en fait $r = |z|$, et on dit que $\theta$ est **un argument** de $z$.*
2. *Soit $r_1$ et $r_2$ deux réels strictement positifs et $\theta_1$ et $\theta_2$ deux réels. Alors*
$$r_1 e^{\theta_1} = r_2 e^{\theta_2} \quad \text{ssi} \quad (r_1 = r_2 \ \text{ et } \ \theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi])\,.$$
3. *Si $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\theta_0$ est un argument de $z$, alors l'ensemble des arguments de $z$ est $\big\{\theta_0 + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\big\}$. On notera alors $\mathrm{Arg}(z) \equiv \theta_0\ [2\pi]$.*

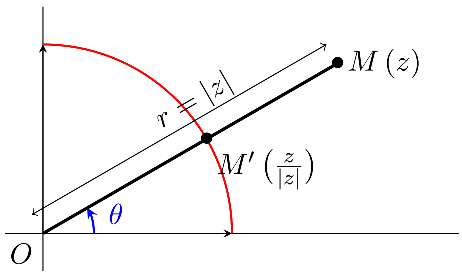


FIGURE 1.4 – Représentation graphique de l'écriture trigonométrique de $z \in \mathbb{C}$.

**Remarque 1.4.10.**

1. *Attention, $0$ n'a pas d'argument, donc pas d'écriture sous forme trigonométrique.*
2. *Il faut savoir transfomer un nombre complexe d'une écriture à une autre, et ce n'est pas très compliqué. Si $z = a + ib = r\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) = re^{i\theta}$ sont les différentes écritures de $z \neq 0$, alors :*
   - *on obtient facilement l'expression de $a$ et $b$ en fonction de $r$ et $\theta$, en utilisant la première égalité : $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.*
   - *réciproquement, pour trouver $r$ et $\theta$ en fonction de $a$ et $b$, on utilise que $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, puis on divise les relations du point précédent par $r$ ($r \neq 0$ puisque $z \neq 0$) pour obtenir : $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Connaître son cosinus et son sinus suffit pour déterminer un angle $\theta$ modulo $2\pi$.*
3. *Attention, si $z = a(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $a$ un réel strictement négatif, ce n'est pas l'écriture trigonométrique de $z$ (le $r$ n'a pas le droit d'être négatif...). On aura $r = |z| = |a|$ et $\mathrm{Arg}(z) \equiv \theta + \pi\ [2\pi]$.*

**Proposition 1.4.11** (Produit et division)**.** *Soit $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ deux nombres complexes non nuls écrits sous forme exponentielle. Alors :*
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \qquad \text{et} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

**Remarque 1.4.12.** *Pour l'écriture algébrique, l'addition a une forme très simple (c'est l'addition terme à terme) alors que la multiplication est "tordue". On constate ici que la multiplication est en fait beaucoup plus simple et naturelle avec l'écriture exponentielle.*
*Ainsi si on fait des sommes de nombres complexes, on priviligiera l'écriture algébrique alors que si on fait des produits, on priviligiera l'écriture exponentielle...*

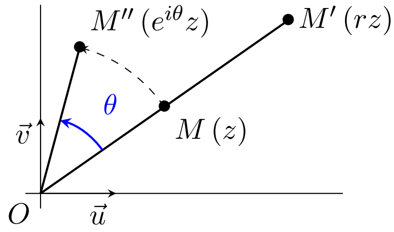


FIGURE 1.5 – Interprétation géométrique de la multiplication par $r$ et par $e^{i\theta}$.

**Proposition 1.4.13** (Interprétation géométrique)**.** *Soit $z$ un nombre complexe non nul et $M$ le point d'affixe $z$ dans le plan complexe. Alors :*

1. *pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, le point $M'$ d'affixe $(rz)$ est l'image de $M$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $r$, c'est à dire le point tel que $\overrightarrow{OM'} = r\overrightarrow{OM}$.*
2. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le point $M''$ d'affixe $(e^{i\theta}z)$ est l'image de $M$ par la rotation de centre $0$ et d'angle $\theta$.*
3. *Par combinaison des deux résultats précédents, le point d'affixe $re^{i\theta}z$ est obtenu en appliquant au point $M$ une homothétie de centre $O$ et de rapport $M$, suivi d'une rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$ (et ça marche aussi dans l'autre sens...).*

## 1.5 Exercices

**Exercice 1.5.1.** *Écrire sous forme algébrique, puis trigonométrique, le nombre complexe*

$$z = \left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 .$$

**Exercice 1.5.2.** *Soit les deux nombres complexes $u = 1+i$ et $v = 1+i\sqrt{3}$.*

1. *Calculer le module et l'argument de $u$ et $v$.*
2. *Soit $z$ défini par $z = \frac{u}{v}$.*
3. *Déterminer l'écriture algébrique de $z$.*
4. *Déterminer l'écriture trigonométrique de $z$.*
5. *En déduire les valeurs de*

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \quad \textit{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) .$$

**Exercice 1.5.3.**

1. *Déterminer le module et un argument de $\frac{1+i}{1-i}$. En déduire la valeur de $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2022}$.*
2. *Déterminer les puissances $n$-èmes de $z = 1+\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)$.*
3. *Comment choisir l'entier naturel $n$ pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit réel ? imaginaire pur ?*

**Exercice 1.5.4.** *En optique ondulatoire, un signal monochromatique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ s'écrit $F_1(t) = A_1 e^{-i\omega t}$. Un autre signal de même pulsation, obtenu par un système interférentiel (deux trous, deux fentes, biprisme), s'écrit $F_2(t) = A_2 e^{-i\omega(t+\tau)}$, où $\tau$ est l'avance temporelle, $\varphi$ telle que $\frac{\tau}{T} = \frac{\varphi}{2\pi}$ étant l'avance de phase.*
*Le signal observé est donc $F(t) = F_1(t) + F_2(t) = A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{-i\omega(t+\tau)}$ et son intensité lumineuse est $I(\varphi) = \frac{1}{2}\left\langle |F(t)|^2 \right\rangle$ (moyenne temporelle sur une période).*

1. *Montrer que* $I(\varphi) = \frac{1}{2}\left|A_1 + A_2 e^{-i\varphi}\right|^2$, *puis qu'il existe des constantes réelles* $I_0$, $C$ *et* $\varphi_0$ *(que vous exprimerez en fonction de* $A_1$ *et* $A_2$*) telles que*

$$I(\varphi) = I_0\left(1 + C\cos(\varphi - \varphi_0)\right) .$$

2. *Montrer qu'on a aussi* $C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$, *où* $I_{min} \leq I_{max}$ *sont les valeurs maximale et minimale de la fonction* $I(\varphi)$.

**Exercice 1.5.5.** *On pose*

$$C = \sum_{k=0}^{10} \cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right), \quad S = \sum_{k=0}^{10} \sin\left(\frac{2k\pi}{11}\right).$$

*Calculer* $C + iS$. *En déduire* $C$ *et* $S$.

# Chapitre 2

# UN PEU D'INTEGRATION

$I$ et $J$ désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

## 2.1 Calcul d'une intégrale

### 2.1.1 Calcul par primitives

**Théorème 2.1.1 (Calcul par primitive).** *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue. Soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$. Alors, pour $a$ et $b$ dans $I$,*

$$\int_a^b f(t)dt = \big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

**Exercice 2.1.2.** *Soit $T > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que*

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t}\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega t)\,dt = T\,\delta_{n,0} = \begin{cases} T & si\ n = 0\,; \\ 0 & sinon\,; \end{cases}$$

*et*

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega t)\,dt = 0\,.$$

**Proposition 2.1.3.** *Soit $f, g : I \to \mathbb{C}$ continues sur $I$. Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels. Alors, pour $a < b$ dans $I$,*

*(i) Linéarité :*

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$$

*(ii) Ordre :*

$$\forall t \in [a,b], f(t) \le g(t) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt,$$

*ce qui implique en particulier que $|\int_a^b f(t)dt| \le \int_a^b |f(t)|dt$.*

**Exercice 2.1.4.** *Soit $T > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Calculer*

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\,dt, \qquad et \qquad \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega t)\sin(n\omega t)\,dt\,.$$

**Primitives usuelles :**

On se donne $f : I \to \mathbb{R}$ continue et on cherche une primitive de $f$ sur $I$. La notation $F(t) = \int f(t)dt$ (notez l'absence de bornes) signifie que $F$ est une primitive de $f$ sur $I$. Ici $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

| $I$ | $f(t)$ | $\int f(t)\,dt$ | $I$ | $f(t)$ | $\int f(t)\,dt$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $t^n$ | $\frac{t^{n+1}}{n+1}$ | $]k\pi, (k+1)\pi[$ | $\frac{1}{\sin^2 t}$ | $-\cot t$ |
| $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ | $t^p$ | $\frac{t^{p+1}}{p+1}$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{\cosh^2 t}$ | $\tanh t$ |
| $]0, +\infty[$ | $t^\alpha$ | $\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ | $\frac{1}{\sinh^2 t}$ | $-\coth t$ |
| $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ | $\frac{1}{t}$ | $\ln\|t\|$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{1+t^2}$ | $\arctan t$ |
| $\mathbb{R}$ | $e^t$ | $e^t$ | $]-1, 1[$ | $\frac{1}{1-t^2}$ | $\arg\tanh t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$ |
| $\mathbb{R}$ | $\sin t$ | $-\cos t$ | $]-\infty, -1[$ ou $]1, \infty[$ | $\frac{1}{1-t^2}$ | $\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+t}{1-t}\right\|$ |
| $\mathbb{R}$ | $\cos t$ | $\sin t$ | $]-1, 1[$ | $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ | $\arcsin t$ ou $-\arccos t$ |
| $\mathbb{R}$ | $\sinh t$ | $\cosh t$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ | $\arg\sinh t = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$ |
| $\mathbb{R}$ | $\cosh t$ | $\sinh t$ | $]1, +\infty[$ | $\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ | $\arg\cosh t = \ln(t + \sqrt{t^2-1})$ |
| $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ | $\frac{1}{\cos^2 t}$ | $\tan t$ | $]-\infty, -1[$ ou $]1, \infty[$ | $\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ | $\ln\left\|t + \sqrt{t^2-1}\right\|$ |

### 2.1.2 Intégration par parties

**Théorème 2.1.5 (Intégration par parties, IPP).** *Soit $u, v : I \to \mathbb{C}$ de classe $C^1$ sur $I$. Alors, pour $a$ et $b$ dans $I$,*

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

**Exercice 2.1.6.** *Calculer*

$$\int_0^{\pi/2} t\,\sin t\,dt, \quad \int_0^1 te^{-t}\,dt, \quad \int_1^e t^2\ln(t)\,dt, \quad \int_0^\pi \cos(t)e^{-2t}\,dt\,.$$

**Exercice 2.1.7.** *Trouver une primitive de la fonction* ln *sur* $]0, +\infty[$.

**Exercice 2.1.8.** *Calculer, pour* $n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-1}^{1} te^{-in\pi t}\, dt\,.$$

### 2.1.3 Changement de variables

**Théorème 2.1.9 (Changement de variables).** *Soit* $\varphi : I \to J$ *de classe* $C^1$ *sur* $I$ *et* $f : J \to \mathbb{C}$ *continue sur* $J$. *Alors, pour tout* $a$ *et* $b$ *dans* $I$, *on a*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Quand on fait un changment de variable dans un calcul d'intégrale on change :
1. la variable
2. l'élément différentiel
3. les bornes !

**Exemple 2.1.10.** *Calculer* $I = \int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ *à l'aide de* $x = \sqrt{1-t}$ *puis à l'aide de* $x = \sin t$.

On a le corollaire suivant (évident si on pense aux aires algébriques).

**Corollaire 2.1.11.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *continue.*
*i) Si* $f$ *est* $T$*-périodique alors, pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

*ii) Si* $f$ *est paire alors, pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt.$$

*iii) Si* $f$ *est impaire alors, pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0.$$

## 2.2 La longueur d'intégration devient infinie

**Définition 2.2.1.** *Soit* $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{C}$ *une fonction continue. Si* $\int_a^X f(t)dt$ *admet une limite finie quand* $X$ *tend vers* $+\infty$ *alors on dit que* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ***converge*** *et on pose*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(t)dt.$$

*Dans le cas contraire on dit que* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *diverge.*

Evidemment on a une définition analogue au voisinage de $-\infty$.

**Exemple 2.2.2.** *Discuter la convergence (et la valeur dans ce cas) ou divergence de*

$$\int_0^{+\infty} 1dt, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t}dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt, \quad \int_0^{+\infty} \cos t dt.$$

**Exemple fondamental.** Pour $a > 0$, $\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{converge ssi} \quad \alpha > 1.}$

En effet si $\alpha = 1$, l'intégrale de $a$ à $X$ vaut $\ln X - \ln a$, qui tend vers l'infini quand $X$ tend vers $+\infty$. Si $\alpha \neq 1$, elle vaut $\frac{1}{1-\alpha}\left[X^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right]$ qui n'a une limite finie que si $\alpha > 1$.

**Définition 2.2.3.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Soit $a$ un réel. On dit que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ **converge** si LES DEUX intégrales $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ convergent. On pose alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt.$$

Attention, la définition n'autorise pas les phénomènes de "compensation". Par exemple, pour tout réel $X$, l'intégrale $\int_{-X}^{X} tdt$ est nulle mais l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ diverge car $\int_0^{+\infty} tdt$ diverge.

### 2.2.1 Critères de convergence pour les fonctions positives

On va énoncer ici des résultats au voisinage de $+\infty$ mais on a évidemment des résultats similaires au voisinage de $-\infty$ (ou d'un réel), tout cela bien sûr pour des fonctions REELLES ET POSITIVES.

**Théorème 2.2.4 (Comparaison).** *Soit $f, g : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues vérifiant*

$$0 \leq f(t) \leq g(t), \quad \forall t \geq a.$$

*Alors*

*(i) $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.*

*(ii) $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.*

**Exercice 2.2.5.** *Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ diverge.*

**Théorème 2.2.6 (Equivalence).** *Soit $f, g : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues. Si les deux fonctions sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ alors leurs intégrales sont de même nature.*

**Exercice 2.2.7.** *Etduier la convergence ou divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ et de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(1/x)}{x} dx$.*

**Théorème 2.2.8 (Négligeabilité).** *Soit $f, g : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues. Si $f$ est négligeable devant $g$ en $+\infty$ (cad si $f = o(g)$) et si l'intégrale de $g$ converge alors celle de $f$ converge.*

On s'en sert beaucoup dans la pratique pour des intégrales impropres faisant intervenir des ln et des exp. On essaie alors d'aller comparer à une fonction puissance.

**Exercice 2.2.9.** *Montrer que $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.*

**Remarque 2.2.10.** *On voit (trop) souvent le raisonnement suivant : "$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ donc l'intégrale converge". Ceci est évidemment FAUX : $\frac{1}{t} \to 0$ mais $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge. Ainsi tendre vers 0 n'est pas une condition suffisante pour avoir une intégrale qui converge.*
*Et d'ailleurs ce n'est pas une condition nécessaire non plus ! On peut très bien avoir une intégrale convergente et ne même pas être bornée...*

### 2.2.2 Intégrale impropre de fonctions complexes (ou réelles de signe non fixe)

On va énoncer ici des résultats au voisinage de $+\infty$ mais on a évidemment des résultats similaires au voisinage de $-\infty$ (ou d'un réel).

**Définition 2.2.11.** *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ continue. On dit que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$* ***est absolument convergente*** *(ACV) si l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$ est convergente.*

**Théorème 2.2.12 (ACV implique CV).** *L'absolue convergence implique la convergence.*

Ainsi, face à une intégrale impropre d'une fonction de signe non fixe, on commence généralement par tester la convergence absolue.

**Exercice 2.2.13.** *Etudier la convergence ou divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt$.*

## 2.3 Exercices

**Exercice 2.3.1.** *Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^t \ln(1 + e^{-t})$. L'objectif est de trouver une primitive de cette fonction $f$.*

1. *Déterminer la dérivée $f'$ de $f$.*
2. *Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que, pour tout réel $t$, $\dfrac{1}{1+e^{-t}} = a + \dfrac{be^{-t}}{1+e^{-t}}$.*
3. *Calculer $f(t) - f'(t)$.*
4. *Déduire des questions précédentes une primitive $F$ de $f$.*

**Exercice 2.3.2.** *Soit $T > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer (de nombreuses méthodes sont possibles !) que*

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(n\omega t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(n\omega t)\, dt = \frac{T}{2}\,.$$

**Exercice 2.3.3.** *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\displaystyle\int_2^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{(t-1)^2}\right) dt.$
2. $\displaystyle\int_1^e t^2 \ln t\, dt.$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3+t^2+2t+1}{t^2+1}\, dt.$ *INDICATION : division euclidienne.*

**Exercice 2.3.4.** *On veut calculer $I = i\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t dt$.*

1. *Justifier d'abord l'existence de $I$.*
2. *1ère méthode : à l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $I = 1/2$.*
3. *2ème méthode : on pose $J = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t dt$ puis $Z = I + iJ$ (où $i^2 = -1$). Montrer que $Z = \frac{1}{1-i}$. Retrouver alors que $I = 1/2$.*

# Chapitre 3

# SERIES DE FOURIER

## 3.1 Coefficients de Fourier

**Définition 3.1.1.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction périodique de période* $T > 0$*, et* $\omega = \frac{2\pi}{T}$ *la pulsation associée. Les* **coefficients de Fourier complexes de** $f$ *sont définis par*

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-2i\pi n\frac{x}{T}}\,dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\omega x}\,dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Exercice 3.1.2.** *Si* $f$ *est de classe* $C^1$*, montrer que* $c_n(f') = inc_n(f)$*. Si* $f$ *est de classe* $C^2$*, montrer que* $c_n(f) = -\frac{1}{n^2}c_n(f'')$*. Si* $f$ *est de classe* $C^p$*, montrer que*

$$c_n(f) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|n|^p}\right), \text{ quand } |n| \to +\infty.$$

On espère pouvoir **décomposer** $f$ **en série de Fourier**, c'est à dire écrire

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n\frac{x}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}. \tag{3.1}$$

Ceci n'a rien d'évident : il faut d'une part que la série converge et, d'autre part, que sa somme soit égale (au moins ponctuellement) à $f(x)$. En Section 3.2, on donnera des conditions suivantes pour que $f$ soit égale à sa série de Fourier. Notons déjà que l'exercice précédent suggère que la régularité de $f$ va aider à faire converger la série de Fourier...

De manière équivalente on pourra préférer utiliser le formalisme suivant :

**Définition 3.1.3.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction périodique de période* $T > 0$*, et* $\omega = \frac{2\pi}{T}$ *la pulsation associée. Les* **coefficients de Fourier réels de** $f$ *sont définis par*

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(2\pi n\frac{x}{T}\right)dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(2\pi n\frac{x}{T}\right)dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(n\omega x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Proposition 3.1.4.** *Si* $f$ *est paire alors tous les* $b_n(f)$ *sont nuls. Si* $f$ *est impaire alors tous les* $a_n(f)$ *sont nuls.*

Dans ce cas, (3.1) se réécrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{T}\right) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big( a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \big), \end{aligned}$$

ou, de manière équivalente,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega x + \varphi_n),$$

avec $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\varphi_n = \arctan(-b_n/a_n)$.

## 3.2 Convergence de la Série de Fourier ?

Lepremier résultat “positif” concerne la convergence dite quadratique.

**Théorème 3.2.1 (Convergence quadratique).** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période $T > 0$ et de “carré sommable”, c'est à dire :*

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 \, dx < +\infty. \tag{3.2}$$

*Alors $f$ est égale à sa décomposition en série de Fourier au sens de la convergence quadratique, c'est-à-dire :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} \big( a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \big) \right|^2 dx = 0 \quad \textit{(cas réel)} \tag{3.3}$$

*ou*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{in\omega x} \right|^2 dx = 0 \quad \textit{(cas complexe).} \tag{3.4}$$

*On a aussi sous cette hypothèse l'***Égalité de Parseval** *:*

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 \, dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big( |a_k|^2 + |b_k|^2 \Big) \quad \textit{(cas réel)} \tag{3.5}$$

*ou*

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \quad \textit{(cas complexe).} \tag{3.6}$$

Notez que l'hypoyhèse (3.2) n'est pas très méchante au sens où elle est souvent satisfaite : par exemple dès que $f$ est continue (voire continue par morceaux) elle est déjà vérifiée ! Mais, en contrepartie, les conclusions (3.3) ou (3.4) sont un peu décevantes au sens où ce sont des convergences “non locales” (à travers l'intégrale) et pas ponctuelles... Pour une telle convergence, voici le résultat fondamental.

**Théorème 3.2.2 (Théorème de Dirichlet).** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période $T > 0$.*

*(i)* *Si $f$ est $C^1$ par morceaux, alors en tout point $x$ la série de Fourier converge et est égale à*

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

*(ii)* *Si $f$ est $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$, alors $f$ est égale à sa décomposition en série de Fourier en tout point $x \in \mathbb{R}$.*

**Exemple 3.2.3.** *Le signal carré vérifie (i). Le signal triangulaire vérifie (ii).*

## 3.3 Exercices

**Exercice 3.3.1.** *Calculer les coefficients de Fourier des deux fonctions $2\pi$-périodiques $f$ et $g$ définies par*

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{pour } x \in ]0; \pi[ \\ -1 & \text{pour } x \in ]-\pi; 0[ \end{cases}$$
$$g(x) = x \quad \text{pour tout } x \in ]-\pi : \pi[.$$

*Représenter leur spectre d'amplitude.*

**Exercice 3.3.2.** *Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0; 2\pi[$.*

1. *Déterminer la série de Fourier de $f$.*
2. *En déduire les valeurs des sommes*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad et \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

*puis les valeurs des sommes*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad et \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

**Exercice 3.3.3.** *Soit $f$ la fonction périodique de période 2 vérifiant $f(x) = x - x^3$ pour tout $x \in [-1; 1[$.*

1. *Déterminer les coefficients de Fourier de $f$.*
2. *En déduire la valeur de la somme*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

**Exercice 3.3.4.** *On veut calculer l'intensité $I(t)$ en régime permanent dans un circuit RLC, avec $R = 100\,\Omega$ (ohms), $L = 10\,H$ (henrys), $C = 0.01F$ (farads), soumis à un échelon de tension $E(t)$ qui est $2\pi$-périodique, avec $E(t) = 200t(\pi^2 - t^2)$ pour $-\pi < t < \pi$. La fonction $I(t)$ est alors solution de l'équation différentielle*

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = E'(t)$$

1. *Résoudre l'équation différentielle homogène associée.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $E'(t)$.*

3. *Trouver une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre de la forme*
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos(nt)+B_n\sin(nt)).$$
4. *Conclure.*

**Exercice 3.3.5.** *À l'aide des séries de Fourier, trouver les oscillations en régime permanent pour l'équation différentielle $y''(t)+y'(t)+y(t)=r(t)$ où $r(t)$ est une force $2\pi$-périodique donnée par*
$$r(t)=\begin{cases}\pi t/4 & si\ -\pi/2\le t<\pi/2\\ \pi(\pi-t)/4 & si\ \pi/2\le t<3\pi/2.\end{cases}$$

# Chapitre 4

# TRANSFORMEE DE FOURIER

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on définit $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sa transformée de Fourier (lorsqu'elle existe !) par

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx. \tag{4.1}$$

On notera aussi parfois $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$. On définit également la transformée de Fourier inverse (lorsqu'elle existe !) par

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

## 4.1 Premiers exemples

1. Calculer $\widehat{f}$ lorsque $f(x) = \frac{1}{2a}\mathbf{1}_{(-a,a)}(x)$ $(a > 0)$. On retient donc que, avec un abus de notation,

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{1}{2a}\mathbf{1}_{(-a,a)}(x)\right) = \frac{\sin(a\xi)}{a\xi} = \operatorname{sinc}(a\xi)}$$

2. Calculer $\widehat{f}$ lorsque $f(x) = \frac{1}{2}ae^{-a|x|}$ $(a > 0)$. On retient donc que, avec un abus de notation,

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}ae^{-a|x|}\right) = \frac{a^2}{a^2 + \xi^2}}$$

3. Pour $a > 0$, on considère la fonction Gaussienne définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-ax^2}$ et sa transformée de Fourier

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-ax^2} dx.$$

   (a) Montrer $\widehat{\varphi}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $\widehat{\varphi}$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\widehat{\varphi}'(\xi)$ comme une intégrale à paramètre.

   (c) En intégrant par parties l'expression de $\widehat{\varphi}'(\xi)$, trouver un problème de Cauchy linéaire vérifié par $\widehat{\varphi}$.

   (d) Calculer $\widehat{\varphi}(\xi)$. On retient donc que, avec un abus de notation,

$$\boxed{\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{1}{4a}\xi^2}}$$

## 4.2 Dans $L^1(\mathbb{R})$

Dans cette section, on suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est à dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty,$$

ce qu'on note $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\widehat{f}$ est bien bien définie, bornée et (admis) continue.
2. On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer alors que

$$\boxed{\widehat{f'}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)}$$

3. On suppose que $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer alors que $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ et

$$\boxed{\widehat{f}\,'(\xi) = -i\mathcal{F}(xf(x))}$$

4. On admet le théorème suivant.

**Théorème 4.2.1** (Fourier et convolution)**.** *Si $f$ et $g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors*

$$\boxed{\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}}$$

5. Comme le montre le premier exemple ci-dessus, il se peut que $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$. Lorsque $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on peut définir $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$ qui "reconstruit" $f$ :

**Théorème 4.2.2** (Inversion)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors*

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = 2\pi f}$$

## 4.3 Dans $L^2(\mathbb{R})$

On note $L^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de carré intégrable, c'est à dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

On admet le théorème suivant.

**Théorème 4.3.1** (Plancherel)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

**Remarque 4.3.2.** *Si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ alors presque tout reste valable avec des changements "évidents". En particulier, les réels $x$ et $\xi$ deviennent des vecteurs, le produit de réels $x\xi$ devient le produit scalaire $\langle x, \xi \rangle$, dans les théorèmes les constantes $2\pi$ deviennent $(2\pi)^N$... Quant aux gaussiennes, vérifier que*

$$\mathcal{F}\left(\exp\left(-\sum_{i=1}^{N} a_i x_i^2\right)\right) = \left(\Pi_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{\pi}{a_i}}\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4a_i} \xi_i^2\right).$$

## 4.4 Exercices

**Exercice 4.4.1.** *Montrer que si* $\widehat{f}(\xi) = 2\pi g(-\xi)$, *alors* $f(x) = \widehat{g}(x)$.

**Exercice 4.4.2.** *Calculer la transformée de Fourier de* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

**Exercice 4.4.3.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

1. *En calculant de deux manières différentes* $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x)f(y)dxdy$, *montrer que* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
2. *Trouver une équation différentielle d'ordre* $1$ *dont* $f$ *est solution.*
3. *En déduire une équation différentielle d'ordre* $1$ *à coefficients constants dont* $\widehat{f}$ *est solution.*
4. *Trouver* $\widehat{f}$.

**Exercice 4.4.4.** *On veut résoudre l'équation différentielle*

$$-y''(x) + a^2 y(x) = g(x)$$

*avec* $g$ *une fonction fixée (de carré intégrable). On cherche une solution telle que* $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 0$.

1. *Trouver une équation satisfaite par la transformée de Fourier* $\widehat{y}$ *de* $y$.
2. *En déduire l'expression de* $y$.

# Chapitre 5

# RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR PAR FOURIER

On considère un conducteur thermique de dimension un, disons une tige de longueur finie $L > 0$ ou de longueur infinie. On note $u(t,x)$ la température au temps $t \geq 0$ et à la position $x \in [0, L]$ (tige bornée) ou $x \in \mathbb{R}$ (tige infinie). En utilisant la loi de Fourier, ou loi de Fick,

$$\overrightarrow{\mathbf{j}} = -\lambda \overrightarrow{Grad}\, u,$$

on aboutit à l'équation aux dérivées partielles (EDP) de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \qquad \text{(EDP CHALEUR)}$$

où $d^2 > 0$ est une constante de diffusion thermique reliée à la tige. Au temps $t = 0$, la température est connue et donnée par une fonction régulière $f$ :

$$u(0,x) = f(x) \qquad \text{(CONDITION INITIALE)}$$

## 5.1 En domaine borné via les séries de Fourier

On considère ici le case de la tige de longueur finie $L > 0$. Pour avoir un problème bien posé, il faut connaître les conditions imposées aux bords de la tige, c'est à dire en $x = 0$ et $x = L$.

### 5.1.1 On impose la température aux bords (Dirichlet)

On impose ici

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \qquad \text{(DIRICHLET)}$$

Le problème complet est donc ici

$$\begin{cases} \partial_t u = d^2 \partial_{xx} u & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0,x) = f(x) & 0 < x < L, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & t > 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

où on suppose que la condition initiale $f$ vérifie

$$f(0) = f(L) = 0.$$

La méthode (cf cours pour les détails) consiste à :

1. Prolonger $f$ en une fonction IMPAIRE et $2\pi$ périodique sur $\mathbb{R}$.
2. Ecrire $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega x)$.
3. Poser $u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(t) \sin(n\omega x)$. Par l'EDP trouver une EDO pour chacun des $\varphi_n$.
4. Conclure.
5. Quid quand $t \to +\infty$ ?

### 5.1.2 Les bords sont "isolés" (Neumann)

On impose ici

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0 \tag{NEUMANN}$$

Le problème complet est donc ici

$$\begin{cases} \partial_t u = d^2 \partial_{xx} u & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0,x) = f(x) & 0 < x < L, \\ \partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,L) = 0 & t > 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

où on suppose que la condition initiale $f$ vérifie

$$f'(0) = f'(L) = 0.$$

La méthode (cf cours pour les détails) consiste à :

1. Prolonger $f$ en une fonction PAIRE et $2\pi$ périodique sur $\mathbb{R}$.
2. Ecrire $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x)$.
3. Poser $u(t,x) = \frac{\varphi_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(t) \cos(n\omega x)$. Par l'EDP trouver une EDO pour chacun des $\varphi_n$.
4. Conclure.
5. Quid quand $t \to +\infty$ ?

## 5.2 En domaine infini via la transformée de Fourier

Le problème complet (dit problème de Cauchy) est donc ici

$$\begin{cases} \partial_t u = d^2 \partial_{xx} u & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.3}$$

On définit (au moins formellement) :

$$\widehat{u}(t,\xi) := \left(\mathcal{F}(u(t,\cdot)\right)(\xi).$$

1. En appliquant la transformée de Fourier au problème de Cauchy EDP, montrer qu'on obtient le problème de Cauchy EDO (où $\xi$ est vu comme un paramètre) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\widehat{u}(t,\xi) = -d^2\xi^2\widehat{u}(t,\xi), \quad t > 0, \\ \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{f}(\xi). \end{cases}$$

2. En déduire $\widehat{u}(t,\xi)$ puis, en appliquant la transformée de Fourier inverse, $u(t,x)$.

Réciproquement, voici donc (écrit en dimension quelconque $N \geq 1$)

$$\boxed{\text{le noyau de la chaleur :} \quad G(t,x) := \frac{1}{(4\pi dt)^{N/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4dt}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N,}$$

qui vérifie l'EDP de la chaleur. De plus c'est une unité approchée (ou **approximation de l'unité**)

**Théorème 5.2.1 (Unité approchée).** *On a*

(*i*) $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, G(t,x) > 0.$
(*ii*) $\forall t > 0, \int_{\mathbb{R}^N} G(t,x)dx = 1.$
(*iii*) $\forall \delta > 0, \lim_{t \searrow 0} \int_{\|x\| \geq \delta} G(t,x)dx = 0.$

On peut montrer rigoureusement le résultat suivant.

**Théorème 5.2.2 (La solution du problème de Cauchy chaleur).** *Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, on pose*

$$u(t,x) := (G(t,\cdot) * f)(x) = \frac{1}{(4\pi dt)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4dt}} f(y)dy. \tag{5.4}$$

*Alors*

(*i*) *$u \in C^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N)$ et vérifie l'EDP de la chaleur.*
(*ii*) *Si $p \neq +\infty$ alors $u(t,\cdot) \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, quand $t \searrow 0$.*
*Si $p = +\infty$ et que en plus $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$, alors on a $u \in C([0,+\infty[\times\mathbb{R}^N)$ (on a posé $u(0,\cdot) = f$).*

Noter l'**effet régularisant** de l'équation de la chaleur !
On peut aussi montrer la **conservation de la chaleur** (il y a juste diffusion) :

$$\forall t > 0, \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx.$$

Noter aussi le **principe de comparaison :**

$$\boxed{\text{si } \ f \geq 0 \ \text{ alors } \ \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \ 0 \leq u(t,x) \leq \|f\|_\infty}$$

la **propagation à vitesse infinie des perturbations :**

$$\boxed{\text{si } \ f \geq 0 \text{ et } f \not\equiv 0 \text{ alors } \ \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \ u(t,\cdot) > 0}$$

Noter enfin que

$$\boxed{\text{si } \ f \geq 0 \ \text{ alors } \ \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \ 0 \leq u(t,x) \leq \frac{\|f\|_1}{(4\pi dt)^{N/2}}}$$