UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2014-2015**

Dynamique des populations, L3 EBO

Examen final sur les modèles continus

Exercice 1

On considère deux populations $x(t)$ et $y(t)$ cohabitant sur un même territoire. On propose le modèle linéaire suivant

$$\begin{cases} x' = \quad -y \\ y' = 2x - 3y. \end{cases}$$

1. Résoudre ce système (noter que les conditions initiales ne sont pas données). Quel est le devenir des populations $x(t)$ et $y(t)$?

   On propose maintenant un modèle avec un apport extérieur

$$\begin{cases} x' = \quad -y + 100 \\ y' = 2x - 3y. \end{cases}$$

2. Résoudre ce système (noter que les conditions initiales ne sont pas données). Quel est le devenir des populations $x(t)$ et $y(t)$?

Exercice 2

1. Résoudre le problème linéaire

$$\begin{cases} z'(t) = z(t) - 1 \\ z(0) = 10. \end{cases}$$

2. On considère une population $n(t)$ suivant le problème non linéaire

$$\begin{cases} n'(t) = 2n(t) - 2\sqrt{n(t)} \\ n(0) = 100. \end{cases}$$

   En faisant un changement de fonction inconnue "$z(t) =$ un fonction de $n(t)$", ramener vous à la question précédente et calculer $n(t)$. Quel est le devenir de cette population ?

3. Remarquons que l'équation précédente s'écrit

$$n'(t) = f(n(t)),$$

   où la fonction f est donnée par $f(x) = 2(x - \sqrt{x})$ pour $x \geq 0$. Tracer la courbe de f en faisant apparaître ses deux zéros. Expliquer alors pourquoi certaines conditions initiales $n(0)$ conduisent à l'extinction.

Exercice 3

On considère deux populations mesurées par $x(t)$ et $y(t)$. Le modèle est le système différentiel non linéaire

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \alpha y) \\ y' = y(-1 + \beta x), \end{cases}$$

où α et β sont deux constantes strictement positives.

1. En quelques phrases, expliquer les phénomènes mis en jeu dans ce système.
2. Dans cette question, on suppose α très petit (c.a.d. $\alpha \to 0$ en termes mathématiques). Quel est le devenir de la population $x(t)$? Suivant la valeur de β, discuter ensuite le devenir de $y(t)$.
3. Dans cette question, on suppose $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 1$. Tracer les isoclines et la direction des trajectoires. Quels sont les équilibres ? Etudier la stabilité des deux équilibres "faciles". Pour l'équilibre plus "subtil" on admet que :

   • pour β proche de 1, on a (après linéarisation) deux valeurs propres réelles négatives. Quel est le devenir des deux populations $x(t)$ et $y(t)$?

   • pour β grand, on a (après linéarisation) deux valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle négative. Quel est le devenir des deux populations $x(t)$ et $y(t)$? Quelle différence avec le cas précédent ?