Université de Rouen Normandie **Année 2022-2023**

Contrôle continu

Exercice 1
Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Etudier la continuité en $(0,0)$ de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Etudier la continuité en $(0,0)$ de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Exercice 2
Soit $n \geq 0$ un entier. On note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus n sur $[0,1]$. On munit E_n de la norme "infinie" :

$$\|P\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |P(x)|.$$

On note $f : E_n \to E_n$ l'application qui envoie P sur $f(P)$ donnée par

$$f(P) = P' + \left(\int_0^1 P(t)dt\right) P.$$

Soit $P \in E_n$. Montrer que f est différentiable en P et, pour $H \in E_n$, exprimer $df_P(H)$.

Exercice 3
On donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy,$$

et on s'intéresse aux extrema locaux.

1. Qui sont les points critiques ?
2. Montrer, sans utiliser la hessienne, qu'il n'y a pas d'extremum local en $(0,0)$.
3. Qu'en est il pour les éventuels autres points critiques ?

Exercice 4

On cherche les fonctions $f :]0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2, \quad \text{pour tout } (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}. \tag{1}$$

Soit f une telle fonction. On considère alors $F :]0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u,v) = f(u, uv).$$

1. Calculer $\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$.
2. En déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par F.
3. En déduire que f est de la forme

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2}$$

   où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.
4. Réciproquement, vérifier que f donnée par (2) vérifie (1).
5. En repartant de la question 1, calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(u,v)$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v)$ (où on a supposé ici que f est de classe C^2).

Exercice 5

Démontrer que la relation $e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x + 1 = 0$ définit y comme fonction φ de x au voisinage du point $(0,1)$. Calculer alors un développement limité de $\varphi(x)$ à l'ordre 1 au voisinage de $x = 0$.