Université de Rouen Normandie **Année 2022-2023**

Seconde chance

Exercice 1

1. On considère une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Donner la définition de "f est différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$".
2. On considère une matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle ,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire canonique. Montrer que f est différentiable en tout $x \in \mathbb{R}^n$ et préciser $df_x(h)$ pour $h \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 2

On donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y\left(x^2 + y^2 - \frac{3}{2}y\right).$$

1. Déterminer les éventuels points critiques.
2. Montrer qu'il y a un unique extremum local (s'intéresser à $f(x, x^3)$ pourra être utile).
3. Cet extremum local est il global ?

Exercice 3

On donne $p :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On se donne $x_0 > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et on note $p_0 := p(x_0, y_0)$. On définit $F :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = y - y_0 + \frac{1}{2}\left(p(x,y) + p_0\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right).$$

Montrer qu'au voisinage de (x_0, y_0), $F(x, y) = 0$ équivaut à $y = \varphi(x)$ où φ est une fonction de classe C^1. Exprimer $\varphi'(x)$ à l'aide de p et de ses dérivées partielles. Donner $\varphi'(x_0)$.

Exercice 4

En appliquant le théorème d'inversion locale montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ voisin de $(1, 1)$, on peut trouver $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} y + e^{xy} = a \\ x + e^{-xy} = b. \end{cases}$$