Université de Rouen Normandie **Année 2025-2026**

Contrôle continu (1h45)

Exercice 1

Trouver les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x.$$

Exercice 2

Déterminer

$$\max_{(x,y)\in[0,\frac{\pi}{2}]^2} \sin x \sin y \sin(x + y).$$

Exercice 3

On cherche les fonctions $f :]0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \text{pour tout } (x, y) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}.$$

Soit f une telle fonction. On considère alors $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u, v) = f(e^u, ve^{2u}).$$

1. "Calculer" $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v)$.
2. En déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par F.
3. Conclure.
4. En repartant de la question 1 (et donc en ignorant les résultats des questions 2 et 3), "calculer" $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u, v)$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(u, v)$ (où on a supposé ici que f est de classe C^2).

Exercice 4

Démontrer que la relation $e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x + 1 = 0$ définit y comme fonction φ de x au voisinage du point $(0, 1)$. Calculer alors un développement limité de $\varphi(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de $x = 0$. Interprétation graphique ? Faire un schéma.