

Traitement du Signal (L3 méca)**Exercice 1 (Les questions sont indépendantes)**

1. Donner la forme algébrique de $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^{20}$.
2. Linéariser $(\cos \theta)^5$.
3. On rappelle que $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$. Exprimer $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos \theta$.

Exercice 2 (Les questions sont indépendantes)

1. Une voiture se déplace à une vitesse $v(t) = 80 - 30e^{-t}$ km/h (t est exprimé en heures). Quelle est la distance parcourue entre $t = 0$ et $t = 2$?
2. Calculer $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$.

Exercice 3

Soit f la fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ \pi - x & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi; 4\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier (réels) de f .
3. L'écriture de f comme somme de sa série de Fourier est-elle valable en tout $x \in \mathbb{R}$?
4. Déduire des questions précédentes les valeurs de

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{puis} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Indication : pour la dernière somme, on pourra "décomposer en les entiers pairs et les entiers impairs"...