Université de Rouen Normandie **Année 2023-2024**

Traitement du Signal (L3 méca)

Exercice 1
On cherche ici à résoudre l'équation des ondes pour la fonction $u = u(t, x)$ de deux variables (t le temps, x l'espace) :

$$\begin{cases} \partial_{tt} u = \partial_{xx} u & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < L, \\ \partial_t u(0, x) = 0 & 0 < x < L, \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

où on suppose que la condition initiale f est positive et vérifie

$$f(0) = f(L) = 0.$$

1. A l'aide d'un schéma, prolonger f en une fonction IMPAIRE et $2L$ périodique sur $\mathbb{R}$.
2. Ecrire $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega x)$. Que valent les b_n ? Que vaut ω ?
3. Poser
$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(t) \sin(n\omega x).$$
Par l'EDP trouver une EDO d'ordre 2 pour chacun des φ_n.
4. Résoudre cette EDO en tenant compte des conditions initiales. Conclure sur $u(t, x)$.

Exercice 2
On définit

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } \ x \geq 0, \\ 0 & \text{si } \ x < 0. \end{cases}$$

Tracer brièvement le graphe de f et montrer que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(1 + i\xi)^2}.$$

Exercice 3
On veut résoudre l'équation différentielle (d'inconnue y)

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où g est un signal donné.

1. Utiliser la transformée de Fourier pour déterminer $\widehat{y}(\xi)$.
2. Ecrire $y(x)$ sous forme d'une intégrale (on pourra utiliser l'Exercice 2).