UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2018-2019**

Calcul différentiel et Equations différentielles, HLMA602, CC 1

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Etudier la continuité en $(0,0)$ de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
2. Etudier la continuité en $(0,0)$ de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
3. On donne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par
$$f(x,y,z) = (xyz, x^2+y^2).$$
Ecrire la matrice jacobienne de f en un point (x,y,z).
4. On donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2.$$
Déterminer les extrema locaux de f.

Exercice 2

On cherche les fonctions $f :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2, \quad \text{pour tout } (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}. \tag{1}$$
Soit f une telle fonction. On considère alors $F :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$F(u,v) = f(u,uv).$$

1. Calculer $\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$.
2. En déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par F.
3. En déduire que f est de la forme
$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2}$$
où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.
4. Réciproquement, vérifier que f donnée par (2) vérifie (1).
5. En repartant de la question 1, calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(u,v)$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v)$ (où on a supposé ici que f est de classe C^2).

Exercice 3

Soit $n \geq 0$ un entier. On note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus n sur $[0,1]$. On note $f : E_n \to E_n$ l'application qui envoie P sur $f(P)$ donnée par
$$f(P)(x) = P'(x) + \int_0^1 P^2(t)dt.$$

1. Quelle est la dimension de E_n ?
2. Soit $P \in E_n$. Montrer que f est différentiable en P et, pour $H \in E_n$, exprimer $df_P(H)$.