UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2018-2019**

Examen final HLMA602 (3h)
CALCUL DIFFERENTIEL ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES
(pas de document, pas de calculatrice, pas de téléphone...)

Exercice 1

On donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y\left(x^2 + y^2 - \frac{3}{2}y\right).$$

1. Déterminer les éventuels points critiques.
2. Montrer qu'il y a un unique extremum local (s'intéresser à $f(x, x^3)$ pourra être utile).
3. Cet extremum local est il global ?

Exercice 2

En appliquant le théorème d'inversion locale montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ voisin de $(1,1)$, on peut trouver $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} y + e^{xy} = a \\ x + e^{-xy} = b. \end{cases}$$

Exercice 3

Résoudre les trois problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} x' = 2tx + \frac{e^{t^2}}{1+t^2} \\ x(0) = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'' + x' - 2x = \cos t - 3\sin t \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = e^{-x}e^t \\ x(0) = \ln 2. \end{cases}$

Exercice 4

On considère deux populations mesurées par $x(t)$ et $y(t)$. Le modèle est le problème de Cauchy non linéaire

$$\begin{cases} x' = x(1 - x + \alpha y) \\ y' = y(1 - y + \beta x) \\ x(0) = x_0 > 0 \\ y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

où α et β sont deux constantes positives.

1. En quelques phrases, expliquer les phénomènes mis en jeu dans ce système.
2. Dans cette question, on suppose $\alpha = 0$ et $\beta > 0$. Quel est le devenir, en temps grand, de la population $x(t)$? de la population $y(t)$?
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que la solution maximale (définie sur un intervalle noté J) reste dans le quadrant nord-est, c'est à dire

$$x(t) > 0 \quad \text{et} \quad y(t) > 0 \quad \text{pour tout } t \in J.$$

4. A partir de maintenant on choisit $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $x_0 = y_0 = 1$, et on s'intéresse donc à

$$\begin{cases} x' = x(1 - x + 2y) \\ y' = y(1 - y + x) \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

et on note $J =]T_{min}, T_{max}[$ avec $-\infty \leq T_{min} < 0 < T_{max} \leq +\infty$.

a) Dans le plan de phase, tracer les isoclines et la direction des trajectoires. Quels sont les équilibres ? Etudier leur stabilité. Faire un “pronostic” sur le devenir des populations.

b) On suit la trajectoire de la solution maximale. En raisonnant par l'absurde (le plan de phase peut aider !) montrer que

$$\forall t \in [0, T_{max}[, \ \frac{x(t) - 1}{2} < y(t) < 1 + x(t).$$

En déduire que

$$\lim_{t \to T_{max}} x(t) = \lim_{t \to T_{max}} y(t) = +\infty.$$

c) On admet qu'on peut trouver $\varepsilon > 0$ assez petit tel que

$$\forall t \in [0, T_{max}[, \ y(t) \leq (1 - \varepsilon)(1 + x(t)).$$

En déduire que

$$\forall t \in [0, T_{max}[, \ y'(t) \geq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} y^2(t).$$

Qu'en déduire pour T_{max} ?