Calcul différentiel

2022-2023, L3

Université de Rouen Normandie, LMRS

Matthieu Alfaro.

AVERTISSEMENT :

Ce poly est un document en construction, qui contient sûrement quelques coquilles voire erreurs et ne demande qu'à s'améliorer.

Ce poly est incomplet et aride à la lecture seule. Il prend son sens une fois complété par les explications, les reformulations, les dessins, les lemmes, les preuves, les exemples donnés en cours, et les exercices traités en TD.

Bref, ce poly n'est qu'un support...

Ce poly est librement inspiré de plusieurs cours préexistants, cf notamment [1], [2] qu'on peut aller voir pour rentrer dans certains détails passés ici sous silence.

Les figures du Chapitre 1 sont fournies par B. Charlier.

Le programme de l'UE est constitué des chapitres 1, 2, 3, 4. Mais le reste pourra vous intéresser un jour...

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

Dans ce chapitre on va considérer des fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p.$$

Pour "représenter" une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles), on renvoie aux Figures 1.1 et 1.2 . Pour représenter une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (à valeurs vectorielles ; on parle de champ de vecteurs), on renvoie à la Figure 1.3.

On rappelle qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ainsi, sur l'ensemble de départ $\mathbb{R}^n$, on peut choisir la norme définie par

$$\|x\|_\infty := \max_{1\leq j\leq n} |x_j|,$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit $x = (x_1, ..., x_n)$, ou la norme définie par

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2},$$

ou toute autre norme, et *idem* sur l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^p$.

Notons qu'à toute fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, on peut associer ses p fonctions composantes $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (avec $1 \leq i \leq p$) de façon à ce que

$$f(x) = (f_1(x), \cdots , f_p(x)),$$

pour tout $x \in U$. Remarquons qu'une fonction composante est à valeurs réelles.

Pour une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}$, vous connaissez la notion de dérivabilité (éventuelle) en un point $a \in U$. En revanche, pour une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$, vous ne connaissez pas pour l'instant de notion de dérivabilité convenable. Afin de donner un sens à cette notion dans le Chapitre 2, nous allons d'abord dans ce chapitre apprendre à "dériver dans une direction" les fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

Avant cela, commençons par quelques courts rappels sur la notion de continuité.

1.1 Continuité

Définition 1.1.1 (Continuité). *On considère $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et un point $a \in U$. On dit que f est continue en a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in U, \|x - a\| < \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur U si elle est continue en tout point $a \in U$.

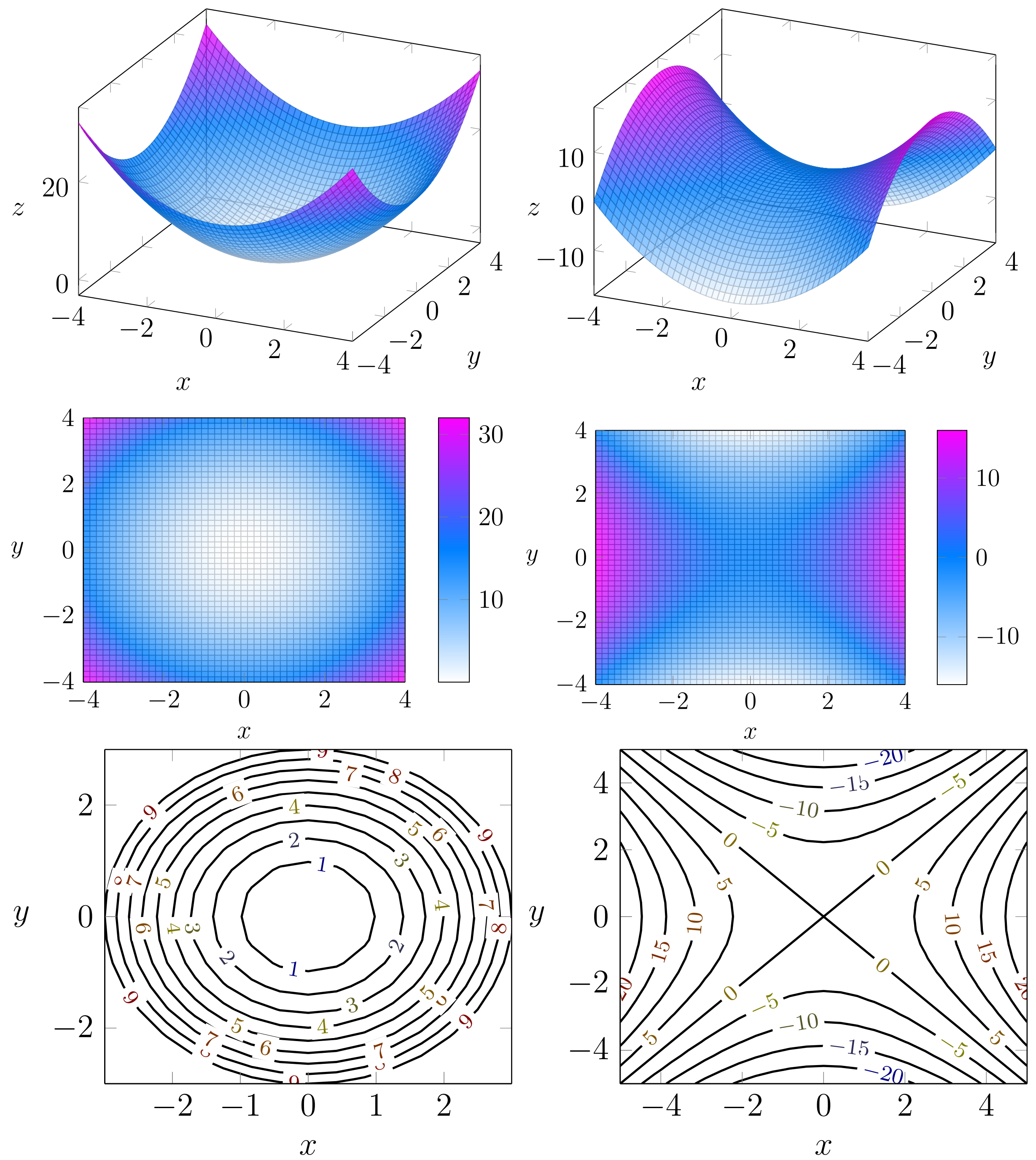

FIGURE 1.1 – A gauche : $f(x, y) = x^2 + y^2$ (fonction radiale). A droite : $f(x, y) = x^2 - y^2$. En haut : le graphe (paraboloïde/selle de cheval). Au milieu : vue de dessus. En bas : les lignes de niveau.

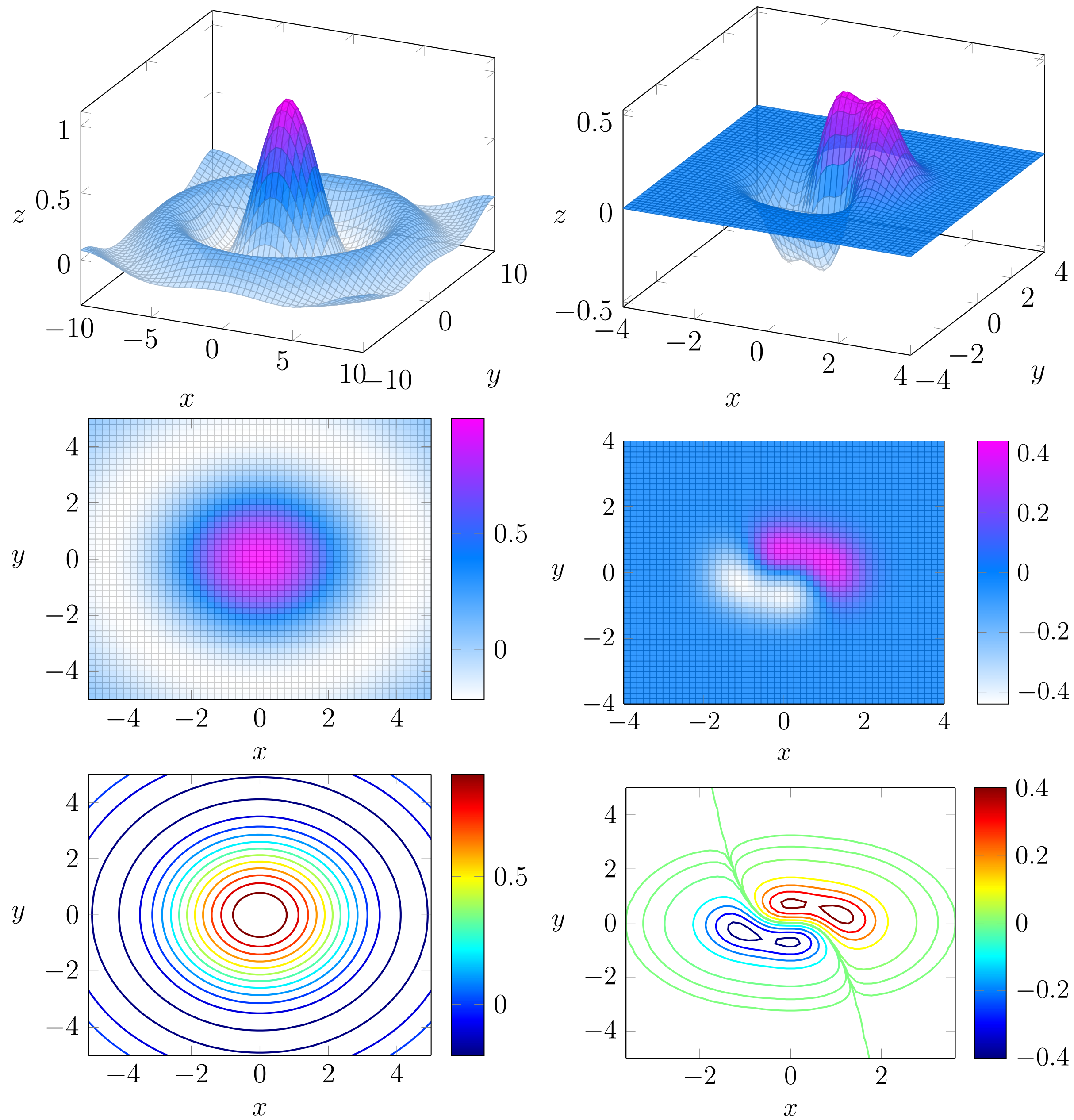

FIGURE 1.2 – A gauche : $f(x,y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (fonction radiale). A droite : $f(x,y) = (x^3+y)e^{-x^2-y^2}$. En haut : le graphe. Au milieu : vue de dessus. En bas : les lignes de niveau.

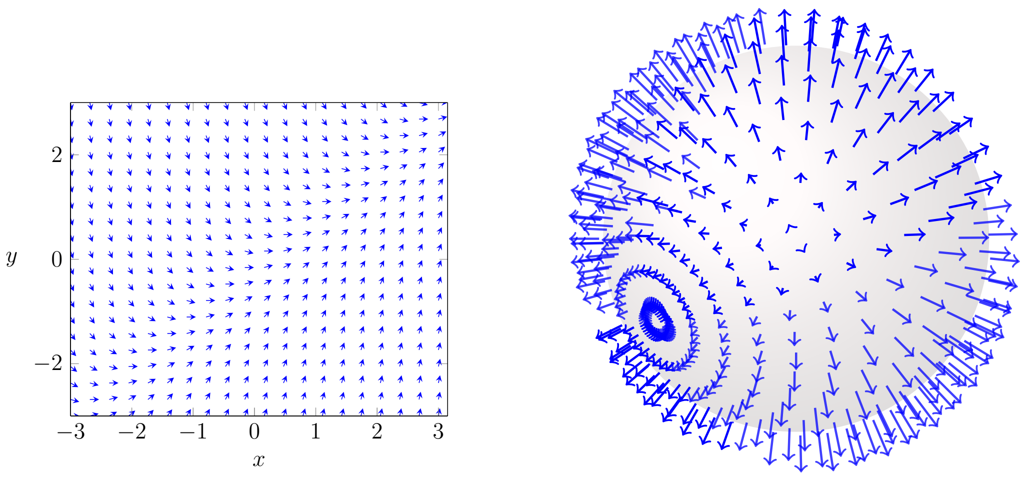

FIGURE 1.3 – A gauche le champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = \frac{0.15}{\sqrt{1+(x-y)^2}}(1, x-y)$. A droite un champ de vecteurs $f : S \to \mathbb{R}^3$ défini sur la sphère $S = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Vous savez qu'en ajoutant, multipliant, divisant ou composant "proprement" des fonctions continues on obtient encore une fonction continue. Ainsi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{e^{\sin(xy)}}{x^2+y^2+1}$ est clairement continue sur $\mathbb{R}^2$. Cependant il faut parfois revenir à la définition pour prouver la continuité ou la non continuité en certains points.

Exemple 1.1.2. *Etudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1.2 Continuité et linéarité

On rappelle que si E et F sont deux espaces vectoriels normés on note $L(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F, et $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.

Proposition 1.2.1. *Soit $f \in L(E,F)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *f est continue sur E.*

(*ii*) *f est continue en 0_E.*

(*iii*) $\exists M \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

(*iv*) *f est bornée sur la boule unité fermée.*

(*v*) *f est bornée sur la sphère unité.*

(*vi*) *f est lipschitzienne sur E, cad $\exists k \geq 0, \forall (x,y) \in E^2, \|f(x)-f(y)\|_F \leq k\|x-y\|_E$.*

On peut faire de $\mathcal{L}(E,F)$ un espace vectoriel normé, grâce notamment à la norme triple : pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ on pose

$$|||\, f\, |||_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{x \in E,\, \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F.$$

Notez qu'on peut alors montrer facilement que

$$|||\, f\, |||_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \in E,\, x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E},$$

mais aussi que

$$||| f |||_{\mathcal{L}(E,F)} = \inf\{M > 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E\},$$

cad que $||| f |||_{\mathcal{L}(E,F)}$ est la meilleure des constantes M qui assure Proposition 1.2.1 (*iii*).

Notons alors que, par définition,

$$\|f(x)\|_F \leq ||| f ||| \times \|x\|_E \quad \text{pour tout } x \in E.$$

La bonne nouvelle c'est que dès que E est de dimension finie alors toute application linéaire de E dans F est continue, c'est à dire que

$$L(E,F) = \mathcal{L}(E,F) \quad \text{si } E \text{ est de dimension finie.}$$

Ainsi, toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans F, en particulier dans $\mathbb{R}^p$, est ("gratuitement") continue. Plus généralement toute application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est continue, et toute application multilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est continue.

1.3 Dérivées directionnelles et dérivées partielles

Soit une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On rappelle que f est dérivable en a signifie, par définition, que le taux d'accroissement

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ admet une limite finie (cad un vecteur de } \mathbb{R}^p\text{) quand } h \to 0.$$

Si ceci est vérifié alors on note $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ la dérivée de f en a.

Pour une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et un $a \in U$ donné, si on veut construire un taux d'accroissement, il faut choisir un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ qui donne la direction dans laquelle on procède au taux d'accroissement. On définit ainsi la notion de dérivée directionnelle.

Définition 1.3.1 (Dérivée directionnelle). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ (qu'on peut supposer de norme 1). On dit que f admet une dérivée en a suivant le vecteur v si*

$$\frac{f(a+hv) - f(a)}{h} \text{ admet une limite finie (cad un vecteur de } \mathbb{R}^p\text{) quand } h \to 0.$$

Si ceci est vérifié alors on note $D_v f(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv)-f(a)}{h}$ la dérivée de f en a suivant le vecteur v.

Dans la suite, on note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.3.2 (Dérivée partielle). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$. Si f admet une dérivée en a suivant e_j, on dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à x_j et on note*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j} f(a).$$

Remarque 1.3.3. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$. Pour $1 \leq j \leq n$ on définit la j-ième application partielle de f en a comme l'application g_j définie, sur un voisinage de a_j et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, par*

$$g_j(x) = f(a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_n),$$

cf Figure 1.4. Alors f admet une dérivée partielle en a par rapport à x_j si et seulement si g_j est dérivable en a_j et alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = g_j'(a_j).$$

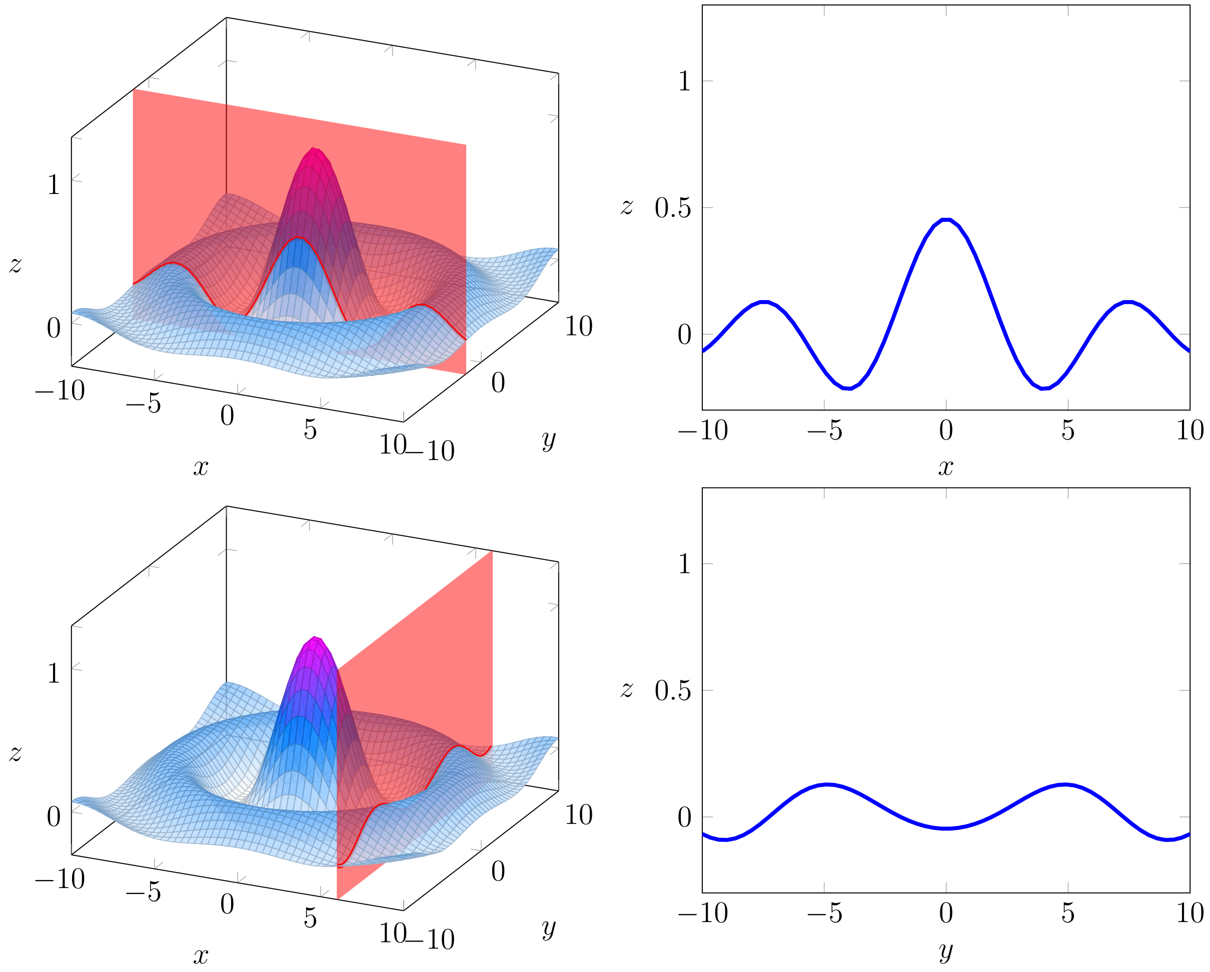

FIGURE 1.4 – En haut à gauche : graphe de $f(x,y)=\frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$. En haut à droite la première application partielle (de la variable x) définie par $g_1(x)=f(x,-2)$. En bas à gauche : graphe de $f(x,y)=\frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$. En bas à droite la deuxième application partielle (de la variable y) définie par $g_2(y)=f(6,y)$.

Ainsi “pour dériver partiellement par rapport à une variable, on fait comme si toutes les autres variables étaient des constantes”...

Définition 1.3.4 (Matrice jacobienne, Jacobien). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$. Si f admet une dérivée partielle en a par rapport à tous les x_j $(1 \leq j \leq n)$ alors il en va de même pour toutes les applications composantes f_i $(1 \leq i \leq p)$. On appelle alors matrice jacobienne de f en a la matrice notée $Df(a)$ de taille (p,n) définie par*

$$Df(a) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Lorsque $p = n$ la matrice jacobienne de f en a (lorsqu'elle existe) est carrée et son déterminant s'appelle le jacobien de f en a. On le note $Jac_f(a)$ ou $\frac{D(f_1,\cdots,f_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}(a)$:

$$Jac_f(a) = \frac{D(f_1,\cdots,f_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}(a) := Det\ Df(a).$$

Exemple 1.3.5. *On donne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 + ye^z, xy + y^2)$. Ecrire la matrice jacobienne en un point (x,y,z).*

Exemple 1.3.6. *On donne $f :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ définie par $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer le jacobien en un point (r,θ).*

Définition 1.3.7 (Gradient). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admettant une dérivée partielle en $a \in U$ par rapport à tous les x_j $(1 \leq j \leq n)$. Alors la matrice jacobienne de f en a est de taille $(1,n)$, cad un vecteur ligne. La transposée de ce vecteur ligne est un vecteur colonne appelé gradient de f en a et noté $\nabla f(a)$, ou $\overrightarrow{Grad}_a f$. On a donc*

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.3.8. *On donne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 + y^3 z$. Ecrire le gradient de f en un point (x,y,z).*

1.4 Exercices

Exercice 1.4.1. *Représenter dans $\mathbb{R}^2$ les ensembles de définition des fonctions définies par*

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \ln(2x + y - 2), \\ f_2(x,y) &= \sqrt{1 - xy} \\ f_3(x,y) &= \frac{\ln(y-x)}{x}, \\ f_4(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Exercice 1.4.2. *Représenter dans $\mathbb{R}^2$ les lignes de niveau k (c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x,y) = k$) des fonctions définies par*

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 - y^2 \quad && \text{avec } k = -1,\ k = 0,\ k = 1, \\ f_2(x,y) &= \tfrac{x^4+y^4}{8-x^2y^2} \quad && \text{avec } k = 2. \end{aligned}$$

Exercice 1.4.3. *On se donne f, g et h définies sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies par*

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$
$$g(x,y) = xy,$$
$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1. *Représenter dans $\mathbb{R}^2$ quelques lignes de niveau de ces fonctions.*
2. *Donner l'allure du graphe de f et g au voisinage de $(0,0)$.*
3. *Donner l'allure du graphe de h au voisinage de $(0,0)$.*
4. *La fonction h est-elle continue en $(0,0)$?*

Exercice 1.4.4. *Dans les cas suivants, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ admet elle une limite en $(0,0)$?*

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.
2. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
3. $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$.
4. $f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x, \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Exercice 1.4.5. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1. *Montrer que $2|xy| \leq x^2 + y^2$ pour tous réels x et y.*
2. *Montrer que, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,*

$$|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2,$$

où $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

Exercice 1.4.6. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos y & \textit{si } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \textit{ et } x \geq 0, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1. *Dessiner son graphe.*
2. *Préciser les points où f est continue et ceux où f est discontinue.*

Exercice 1.4.7. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. On peut écrire $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_p(x))$ où les $f_i : U \to \mathbb{R}$ sont les p fonctions composantes. Soit $a \in U$. Montrer que f est continue en a si et seulement si toutes les f_i $(1 \leq i \leq p)$ sont continues en a.*

Exercice 1.4.8. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on définit la première application partielle en y par $g_y : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x,y)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on définit la deuxième application partielle en x par $g_x : y \in \mathbb{R} \mapsto f(x,y)$. Montrer que*

$$f \text{ continue sur } \mathbb{R}^2 \Longrightarrow \text{ pour tout } y,\ g_y \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x,\ g_x \text{ continue sur } \mathbb{R}.$$

A l'aide de la fonction g de l'exercice 1.1.2, montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 1.4.9. *Déterminer les matrices jacobiennes, et le jacobien s'il existe, des applications suivantes :*

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y) = x \cos(y - x)$.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $g(t) = (\cos t, \sin t, t)$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $h(x, y) = (xy, e^x \cos y)$.

Exercice 1.4.10. *On donne* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \|x\|_2$. *Calculer, lorsqu'il existe,* $\nabla f(a)$ *le gradient de* f *en* $a \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 1.4.11. *On donne* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On se donne une direction unitaire $e = (\cos \theta, \sin \theta)$. *Montrer que, pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, *la dérivée directionnelle* $D_e f(0, 0)$ *existe et la calculer. Montrer aussi que* f *n'est pas continue en* $(0, 0)$.

Chapitre 2

Différentiabilité

Dans tout ce chapitre E, F et G désignent des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels normés de dimension finie, par exemple $\mathbb{R}^n$, ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n. On désignera par U un ouvert de E et U' un ouvert de F. On va considérer des fonctions f

$$f : U \subset E \to F,$$

et $g : U' \subset F \to G$.

2.1 Définition et premiers exemples

On se donne un point $a \in U$ et on veut étudier f au voisinage de ce a. On sait déjà ce que signifie "f continue en a" :

$$f \text{ continue en } a \Longleftrightarrow f(a+h) = f(a) + o(1) \ \text{ quand } h \to 0_E.$$

On voudrait mieux contrôler le $o(1)$... On se souvient que, pour une fonction de la variable réelle $f : U \subset \mathbb{R} \to F$,

$$f \text{ dérivable en } a \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{il existe un vecteur de } F \text{ noté } f'(a) \text{ tel que} \\ f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h) \ \text{ quand } h \to 0_{\mathbb{R}}. \end{array}$$

Théorème-Definition 2.1.1 (Différentiabilité)**.** *Soit $f : U \subset E \to F$. Soit $a \in U$. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire continue de E dans F, notée df_a ou $df(a)$, telle que*

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{df_a}_{\in \mathcal{L}(E,F)}(h) + o(h) \ \ \textit{quand } h \to 0_E.$$

En cas d'existence une telle application linéaire continue df_a est unique. On dit alors que l'application linéaire df_a est tangente à f en a.

Exemple 2.1.2. *Si $E = \mathbb{R}$ alors on est face à une fonction de la variable réelle et il serait bon que la notion de dérivabilité en a coïncide avec celle de différentiabilité en a. C'est bien le cas : f est dérivable en a si et seulement si f est différentiable en a et, dans ce cas l'application linéaire $df_a : U \subset \mathbb{R} \to F$ est définie par*

$$\forall h \in U, df_a(h) = hf'(a).$$

Dans la suite, l'application linéaire df_a sera également notée $f'(a)$.

Exemple 2.1.3. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est déjà une application linéaire alors elle est différentiable en tout $a \in E$ et $df_a = f$ (ou $f'(a) = f$).*

Exemple 2.1.4. *Si $B : E \times E \to F$ est une application bilinéaire alors B est différentiable en tout point $(x,y) \in E^2$ et $dB_{(x,y)} = B'(x,y) \in \mathcal{L}(E^2,F)$ est donnée par*

$$\forall (h_1,h_2) \in E^2, dB_{(x,y)}(h_1,h_2) = B'(x,y)((h_1,h_2)) = B(x,h_2) + B(h_1,y).$$

Proposition 2.1.5 (Diff. implique continuité)**.** *Soit $f : U \subset E \to F$. Soit $a \in U$. Alors*

$$f \text{ différentiable en } a \Longrightarrow f \text{ continue en } a.$$

On fait maintenant le lien avec le chapitre 1 sur les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Proposition 2.1.6 (Diff. implique dérivées directionnelles et donc dérivées partielles)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in U$. Alors, pour toute direction $v \in \mathbb{R}^n$ (de norme 1), f admet une dérivée en a suivant le vecteur v donnée par*

$$D_v f(a) = df_a(v).$$

En particulier, toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ ($1 \le i \le p$, $1 \le j \le n$) existent et $df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ est donnée par

$$df_a(h) = Df(a)h.$$

Autrement dit la matrice de l'application linéaire df_a dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ n'est autre que la matrice jacobienne de f en a.

En particulier, pour $p = 1$ (fonctions à valeurs réelles), df_a est un forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ qui s'écrit via le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ avec le vecteur gradient :

$$df_a(h) = \langle \overrightarrow{Grad_a} f, h\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j \tag{2.1}$$

et donc

$$f(a+h) = f(a) + \langle \overrightarrow{Grad_a} f, h\rangle + o(h) \text{ quand } h \to 0.$$

ATTENTION, la réciproque est fausse : l'existence de toutes les dérivées partielles ne suffit pas à assurer la différentiabilité, cf Exercices 1.4.11 et 2.4.1.

2.2 Opérations sur les différentielles

Sans surprise, si f et g sont différentiables en a alors toute combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et

$$d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a.$$

Bref, tout comme la dérivation, la différentiation est une opération linéaire.

Théorème 2.2.1 (Composition)**.** *Soit $g : U \subset E \to F$ et $f : U' \subset F \to G$. On suppose $g(U) \subset U'$. Si g est différentiable en $a \in U$ et f est différentiable en $g(a) \in U'$ alors $f \circ g$ est différentiable en a et*

$$d(f \circ g)_a = df_{g(a)} \circ dg_a,$$

qu'on pourra préférer écrire[1]

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \circ g'(a). \tag{2.2}$$

1. souvenons nous que, pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$ qui est une égalité entre nombres impliquant un produit, et observons que (2.2) est une égalité entre applications linéaires impliquant une composition.

Notation différentielle : il est très commode de noter df l'image par l'application linéaire $f'(x)$ d'un vecteur arbitraire noté dx, et donc

$$\underbrace{df}_{\in F} = \underbrace{f'(x)}_{\in \mathcal{L}(E,F)} \underbrace{dx}_{\in E}.$$

Par exemple, pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, l'égalité (2.1) s'écrit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

ce qui ne signifie pas autre chose que

$$df_a(h_1, ..., h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n.$$

Cette notation est un peu "dangereuse" mais permet de calculer relativement aisément certaines différentielles et dérivées partielles...

Exemple 2.2.2. *Calculer, lorsqu'elle existe, la différentielle de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

puis retrouver le gradient calculé à l'Exercice 1.4.10.

En combinant le Théorème 2.2.1 et la Proposition 2.1.6, on comprend que la matrice jacobienne d'une composition est le produit des matrices jacobiennes (sous hypothèse de différentiabilité bien sûr).

Corollaire 2.2.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, U' un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $g : U \subset \mathbb{R}^n \to U' \subset \mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in U$, $f : U' \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ différentiable en $g(a) \in U'$. Alors $f \circ g$ est différentiable en a et*

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a)) Dg(a),$$

ce qui donne accès aux dérivées partielles de $f \circ g$:

$$\frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(g(a)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(a), \quad 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq n. \tag{2.3}$$

Exercice 2.2.4. *On se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par*

$$F(u, v) := f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

Calculer les dérivées partielles de F en fonction de celles de f. En déduire la résolution de l'équation aux dérivées partielles (où la fonction inconnue f est supposée différentiable sur $\mathbb{R}^2$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2.2.5. *On se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$. On définit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par*

$$F(t) := f\left(x(t), y(t)\right).$$

Calculer la dérivée de F en fonctions des dérivées partielles de f et des dérivées de x et y.

Application au "passage en polaires" : on se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. On définit $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$F(r, \theta) = f \circ \varphi(r, \theta).$$

Calculer les dérivées partielles de F grâce à (2.3), puis grâce à la notation différentielle. Notons que le jacobien de l'application "polaires vers cartésiennes" $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ s'annule en $r = 0$. On en reparlera au Chapitre 4...

2.3 Inégalité des accroissements finis et applications

L'égalité des accroissements finis pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se généralise facilement aux fonctions de E dans $\mathbb{R}$, cf Exercice 2.4.21. En revanche pour les fonctions à valeurs vectorielles, il n'y a pas d'égalité des accroissements finis.

Exemple 2.3.1. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ ne vérifie pas l'égalité des accroissements finis.*

Heureusement, l'inégalité des accroissements finis reste vraie pour les fonctions de la variable réelle à valeurs vectorielles (cf semestres précédents). On en déduit alors assez facilement l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions de E dans F.

Théorème 2.3.2 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f : U \subset E \to F$ continue. Soit $[a, b]$ un segment inclus dans U. On suppose f différentiable sur le segment ouvert $]a, b[$ et*

$$M := \sup_{0<t<1} ||| f'(a + t(b - a)) |||< +\infty.$$

Alors

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq M\|b - a\|_E.$$

On a vu à la Proposition 2.1.6 que, pour des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, “différentiabilité implique dérivées partielles” mais que la réciproque est fausse (cf Exercice 2.4.1). Néanmoins si on ajoute la continuité des dérivées partielles on a bien que “dérivées partielles continues implique différentiabilité”, ce qui est bien pratique car il est plus agréable de calculer des dérivées partielles que de différentier... Notons que la preuve du théorème ci-dessous utilise l'inégalité des accroissements finis d'où sa présence dans cette section !

Théorème 2.3.3 (Dérivées partielles continues implique diff.)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$. On suppose que toutes les dérivées partielles de f existent au voisinage de a et sont continues en a. Alors f est différentiable en a et*

$$df_a(h) = Df(a)h \quad \text{pour } h \in \mathbb{R}^n.$$

En particulier, pour $p = 1$ (fonctions à valeurs réelles), on a

$$df_a(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j \quad \text{pour } h \in \mathbb{R}^n.$$

Corollaire-Definition 2.3.4 (Classe C^1)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est différentiable sur U et $a \in U \mapsto df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est continue sur U*

(ii) *toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues sur U.*

Si elles sont satisfaites alors on dit que f est <u>de classe C^1 sur U</u>.

Corollaire 2.3.5. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable sur U supposé convexe. Alors f est constante sur U si et seulement si la différentielle df est nulle.*

2.4 Exercices

Différentielles et dérivées partielles

Exercice 2.4.1. *On reprend la fonction g de l'Exemple 1.1.2. Montrer que $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ existent. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Que dit cet exercice sur la Proposition 2.1.6 ?*

Exercice 2.4.2. *On donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+2x^2y+3y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0,0)$, que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, et que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2.4.3. *On donne $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, e^{2t}, t \right).$$

Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et que f devient alors différentiable en 0. Que vaut df_0 ?

Exercice 2.4.4. *On donne $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, e^{2t}, t \ln |t| \right).$$

Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et étudier alors la différentiabilité de f en 0.

Exercice 2.4.5. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y.$$

1. *La fonction f admet-elle des dérivées directionnelles en tout point de $\mathbb{R}^2$ suivant tous les vecteurs ?*
2. *Soit $u = (a,b)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Calculer, à l'aide de la définition, $D_u f(1,2)$ la dérivée directionnelle de f au point $(1,2)$ suivant u.*
3. *En déduire $df_{(1,2)}$ la différentielle de f en $(1,2)$.*
4. *En déduire les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.*

Exercice 2.4.6. *Calculer la différentielle de f au point (a,b) dans les cas suivants.*

1. $f(x,y) = x\sqrt{y}$, $\quad (a,b) = (1,4)$.
2. $f(x,y) = \frac{x}{y}$, $\quad (a,b) = (6,3)$.
3. $f(x,y) = \sin(x+2y)$, $\quad (a,b) = (\pi,0)$.
4. $f(x,y) = \sqrt{x+e^y}$, $\quad (a,b) = (1,0)$.

Exercice 2.4.7. *Pour les quatre fonctions f, g ,h, u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies ci-dessous :*

1. *En quels points la fonction est elle continue ?*
2. *Calculer les dérivées partielles aux points où elles existent.*

3. *En quels points la fonction admet elle des dérivées directionnelles suivant tout vecteur ?*
4. *En quels points la fonction est-elle différentiable ?*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & sinon.\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

$$h(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & sinon.\end{cases}\qquad u(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

Pour u, on pourra considérer la restriction de u à la parabole d'équation $y=x^2$.

Exercice 2.4.8. *Trouver les* $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ *de classe* C^1 *telles que*

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0,\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

On pourra "passer en polaires".

Calculs de différentielles

Exercice 2.4.9. *On donne* $f:A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto A^2\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que f est différentiable en tout* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et déterminer* df_A.

Exercice 2.4.10. *Montrer que l'application* $f:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par* $f(A)={}^tAA$ *est différentiable en tout* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et déterminer* df_A.

Exercice 2.4.11 (Forme bilinéaire.). *Soit* $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ *une matrice réelle. Soit l'application*

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}\\(U,V)&\mapsto{}^tUMV\end{aligned}$$

où les éléments de $\mathbb{R}^2$ *sont écrits en colonne. On note* (e_1,e_2) *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$. *Montrer que f est différentiable, et calculer* $df_{(e_1,e_1)}(e_2,e_2)$.

Exercice 2.4.12. *On considère* $f:GL_n(\mathbb{R})\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par* $f(A)=A^{-1}$.

1. *Montrer que* $GL_n(\mathbb{R})$ *est un ouvert de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *Sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *on considère une norme* $\|\cdot\|$ *qui vérifie* $\|AB\|\leq\|A\|\times\|B\|$ *(ça existe ?...). Montrer que si* $\|H\|<1$ *alors* $I_n-H\in GL_n(\mathbb{R})$ *et*

$$(I_n-H)^{-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}H^k.$$

3. *Montrer que f est différentiable en* I_n *et préciser* df_{I_n}.
4. *Montrer que f est différentiable en tout* $A\in GL_n(\mathbb{R})$ *et préciser* df_A.

Exercice 2.4.13. *On considère* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *différentiable sur* $\mathbb{R}$. *On définit* $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *par*

$$g(x,y,z)=f(x^2-y^2,y^2-z^2,z^2-x^2).$$

Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ *et que, pour tout* $t\in\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,t,t)+\frac{\partial g}{\partial y}(t,t,t)+\frac{\partial g}{\partial z}(t,t,t)=0.$$

Exercice 2.4.14. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On définit des fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par*

$$g(x,y) = f(y,x), \quad h(x) = f(x,-x).$$

Montrer que g et h sont différentiables, et déterminer leurs différentielles en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 2.4.15. *Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|_2},$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne. Montrer que f est différentiable, et déterminer sa différentielle.

Exercice 2.4.16 (Différentiabilité des applications homogènes.)**.** *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit qu'une application $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}^p$ est positivement homogène de degré λ si*

$$g(tx) = t^\lambda g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ tout } t > 0.$$

1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable en 0, telle que $f_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ est positivement homogène de degré 1. Montrer que $f(0) = 0$, puis que f est linéaire.*
2. *Une norme sur $\mathbb{R}^n$, vue comme application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, peut-elle être différentiable à l'origine ?*

Exercice 2.4.17 (Identité d'Euler pour les applications homogènes.)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Montrer que f est homogène de degré $\lambda > 0$ si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad df_x(x) = \lambda f(x).$$

Fonctions de classes C^1

Exercice 2.4.18. *Montrer que les deux fonctions f et g suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Exercice 2.4.19. *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient*

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4 + 2y^4.$$

Pour cela on pourra, pour un (x_0, y_0) fixé, considérer la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f(tx_0, ty_0).$$

Exercice 2.4.20. *Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application déterminant définie par $f(M) = \det M$.*

1. *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *On note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 0, sauf en position (i,j) où le coefficient est 1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\frac{\partial f}{\partial E_{ij}}(A)$, en s'aidant du développement du déterminant suivant une ligne (ou une colonne).*
3. *Montrer que $df_A(H) = Tr({}^t Com(A)H)$.*

Accroissements finis

Exercice 2.4.21. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit a et b deux points de U tels que $[a,b] \subset U$. Montrer l'égalité des accroissements finis :*

$$\exists c \in]a,b[,\ f(b) - f(a) = df_c(b-a).$$

Pour cela, on se ramènera à une fonction de la variable réelle.

Exercice 2.4.22. *On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$f(x,y) = \left(\frac{\sin(x+y)}{2}, \frac{\cos(x-y)}{2}\right).$$

Montrer que, si on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_2$, f est contractante (cad k-lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$). En déduire qu'il existe un unique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_0,y_0) = (x_0,y_0)$.

Que se serait-il passé si on avait choisi la norme $\|\cdot\|_\infty$ ou la norme $\|\cdot\|_1$?

Exercice 2.4.23 (Fonction convexe)**.** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est convexe si*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \forall (x,y) \in U^2, \forall \lambda \in [0,1].$$

Montrer que, si f est différentiable sur U, alors elle est convexe si et seulement si elle vérifie $f(y) - f(x) \geq df_x(y-x)$ pour tout $(x,y) \in U^2$.

Exercice 2.4.24 (Longueur d'une courbe)**.** *On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1. Une subdivision σ de $[0,1]$ est la donnée de $k+1$ réels $t_0, t_1, \ldots, t_k$ ($k \geq 1$) tels que*

$$t_0 = 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = 1.$$

On écrit $\sigma = (t_0, \ldots, t_k)$. A une telle subdivision est associée une ligne brisée dans $\mathbb{R}^n$, dont la longueur est

$$L(\sigma) := \sum_{i=0}^{k-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|.$$

On appelle longueur de γ le nombre $L := \sup L(\sigma)$, où la borne supérieure est prise sur l'ensemble de toutes les subdivisions σ de $[0,1]$.

1. *Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ quelconques. Quelle est la longueur de la courbe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ définie par $\gamma(t) = (1-t)x + ty$?*
2. *Montrer que toute courbe de classe C^1 est de longueur finie. Montrer qu'un segment de droite est le plus court chemin pour aller d'un point de $\mathbb{R}^n$ à un autre.*
3. *Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un $r > 0$ tel que,*
$$\forall (s,t) \in [0,1]^2, |t-s| \leq r \Longrightarrow \|\gamma(t) - \gamma(s) - (t-s)\gamma'(s)\| \leq \varepsilon |t-s|.$$
4. *En déduire que $L = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$.*

Exercice 2.4.25. *Montrer que si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée de classe C^1 vérifiant $\gamma([0,1]) \subset U$, alors sa longueur $L(\gamma)$ vérifie*

$$\|f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))\| \leq L(\gamma) \sup_{t \in [0,1]} ||| \, df_{\gamma(t)} \, ||| \, .$$

Chapitre 3

Différentielles d'ordre supérieur

Dans tout ce chapitre E et F désignent des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels normés de dimension finie, par exemple $\mathbb{R}^n$, ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n. On désignera par U un ouvert de E. On va considérer des fonctions f

$$f : U \subset E \to F.$$

3.1 Différentielle seconde

Prenons $f : U \subset E \to F$ différentiable sur U. On dispose donc de l'application

$$\begin{aligned} df : U \subset E &\to \mathcal{L}(E, F) \\ x &\mapsto df_x. \end{aligned}$$

L'ensemble des applications linéaires continues $\mathcal{L}(E, F)$ étant lui même un espace vectoriel de dimension finie, on peut se demander si, pour un $a \in U$ fixé, l'application df est différentiable au point a. Si oui, on dira que f est <u>deux fois différentiable en a</u>. Si ceci est vrai pour tout $a \in U$ alors on dira que f est <u>deux fois différentiable sur U</u>.

De quels objets parlons nous?... Si $f : U \subset E \to F$ est deux fois différentiable en $a \in U$ alors

$$[d(df)]_a \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)).$$

Ainsi, pour $h \in E$, $[d(df)]_a(h) \in \mathcal{L}(E, F)$. Ainsi pour $k \in E$, $\{[d(df)]_a(h)\}(k) \in F$. C'est horrible... On va donc systématiquement confondre $[d(df)]_a$ avec l'application bilinéaire de $E \times E$ dans F notée $d^2 f_a$, ou $d^2 f(a)$, et définie par

$$d^2 f(a)(h, k) := \{[d(df)]_a(h)\}(k), \qquad \text{pour tout } (h, k) \in E^2. \tag{3.1}$$

On peut alors montrer [1] que, en plus d'être bilinéaire, $d^2 f(a)$ est également symétrique, c'est à dire

$$d^2 f(a)(h, k) = d^2 f(a)(k, h), \qquad \text{pour tout } (h, k) \in E^2. \tag{3.2}$$

Evidemment, si $f : U \subset E \to F$ est deux fois différentiable sur U et si

$$x \in U \mapsto d^2 f(x) \in \mathcal{BIL}(E \times E, F)$$

est continue sur U, on dira que f est <u>de classe C^2 sur U</u>.

1. cela utilise les accroissements finis et n'a rien d'évident !

Exemple 3.1.1. *Pour $f : \mathbb{R} \to F$, f est deux fois différentiable en a si et seulement si f est deux fois dérivable en a et on a*

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, d^2 f(a)(h,k) = hkf''(a).$$

Exemple 3.1.2. *Si $f : E \to F$ est linéaire alors f est deux fois différentiable sur E et pour tout $x \in E$, $d^2 f(x) = 0_{\mathcal{BIL}(E\times E,F)}$, cad $d^2 f(x)(h,k) = 0_F$ pour tout $(h,k) \in E^2$.*

Exemple 3.1.3. *On reprend $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'Exercire 2.4.9. Que vaut $d^2 f(A)(H,K)$?*

Exemple 3.1.4. *Si $B : E \times E \to F$ est une application bilinéaire alors B est deux fois différentiable en tout point $(x,y) \in E^2$ et*

$$d^2 B(x,y)((h_1,h_2),(k_1,k_2)) = B(k_1,h_2) + B(h_1,k_2).$$

En particulier, $d^2 B(x,y)$ ne dépend pas de (x,y) et donc $d^2 B$ est constante.

3.2 Dérivées partielles d'ordre 2, Schwartz, Matrice hessienne

Dans cette section, on considère des $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Si f est C^1 sur U alors on sait que, pour tout $1 \leq i \leq n$, l'application $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est continue sur U. Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet une dérivée partielle par rapport en x_j en $a \in U$, alors

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) \quad \text{se note} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a),$$

et on parle de dérivée partielle d'ordre 2.

Exemple 3.2.1. *Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 y + e^{xy} + y$.*

De même que la Proposition 2.1.6 nous disait que, en cas d'existence, la différentielle s'écrit à l'aide des dérivées partielles d'ordre 1, le résultat suivant nous dit que, en cas d'existence, la différentielle seconde s'écrit à l'aide des dérivées partielles d'ordre 2.

Proposition 3.2.2 (Diff. seconde implique dérivées partielles d'ordre 2)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable sur U et deux fois différentiable en $a \in U$. Alors toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f en a existent et, $d^2 f_a$ est donnée par*

$$d^2 f(a)(h,k) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j, \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

ATTENTION, la réciproque est fausse : l'existence de toutes les dérivées partielles d'ordre 2 ne suffit pas à assurer la différentiabilité d'ordre 2, cf Exercice 3.6.1.

De la symétrie de $d^2 f(a)$ et de la Proposition 3.2.2, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.3 ("Théorème de Schwartz")**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable sur U et deux fois différentiable en $a \in U$. Alors toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f en a existent et, pour tout $1 \leq i,j \leq n$,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Le résultat ci-dessus est un simple corollaire. Le "vrai" théorème de Schwartz conclut également que "les dérivées partielles commutent", mais sous des hypothèses plus faibles portant sur les dérives partielles et non sur la différentiabilité seconde.

On remarque que la formule (3.3) s'écrit

$$d^2f(a)(h,k) = \langle h, D^2f(a)k\rangle = {}^thD^2f(a)k, \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \tag{3.4}$$

où la matrice carrée

$$D^2f(a) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \tag{3.5}$$

s'appelle la matrice hessienne de f en a, parfois aussi notée Hess$f(a)$.

Ainsi, sous les hypothèse de la Proposition 3.2.2, la matrice hessienne $D^2f(a)$ est symétrique réelle, et n'est autre que la matrice de la forme bilinéaire symétrique d^2f_a par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.2.4 (Classe C^2)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Alors f est de classe C^2 sur U si et seulement si toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à 2 existent et sont continues sur U. Dans ce cas, les "dérivées partielles commutent".*

3.3 Taylor-Young à l'ordre 2 et extrema

Dans cette section, on considère des $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ à valeurs réelles.

La formule de Taylor-Young permet d'approcher *localement* une fonction.

Théorème 3.3.1 (Taylor-Young à l'odre 2 pour f à valeurs réelles)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, différentiable sur U et deux fois différentiable en $a \in U$. Alors il existe un voisinage V de 0 et une fonction $\varepsilon : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfaisant*

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0,$$

tels que, pour tout $h \in V$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}d^2f_a(h,h) + \|h\|^2\varepsilon(h) \qquad (3.6)\\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n h_ih_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \|h\|^2\varepsilon(h) \\ &= f(a) + \underbrace{\langle \overrightarrow{Grad}_a f, h\rangle}_{\textit{partie linéaire}} + \underbrace{\frac{1}{2}\langle h, D^2f(a)h\rangle}_{\textit{partie quadratique}} + \|h\|^2\varepsilon(h). \end{aligned}$$

Applications à la recherche d'extrema

Commençons par une fonction *de la variable réelle* $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qu'on suppose "assez régulière". Si f admet un extremum local en $a \in U$ alors on sait que $f'(a) = 0$, qui est donc une condition nécessaire d'extremum. Réciproquement si $a \in U$ est tel que $f'(a) = 0$ (on parle de point critique) alors la formule de Taylor-Young nous dit que

1. si $f''(a) > 0$ alors f a un minimum local en a.

2. si $f''(a) < 0$ alors f a un maximum local en a.

En revanche si $f''(a) = 0$ alors "tout est possible" : pas d'extremum local ou maximum local ou minimum local en a.

Exemple 3.3.2. *Avec $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto -x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^4$, on comprend tout...*

Pour les fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ "assez régulière", la condition de point critique devient $df_a = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$ soit encore $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}_a f = 0_{\mathbb{R}^n}$ soit encore $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$. Réciproquement si $a \in U$ est un point critique alors la formule de Taylor-Young nous dit que

1. si la matrice hessienne $D^2 f(a)$ est définie positive alors f a un minimum local en a (cf paraboloïde Figure 1.1 gauche).
2. si la matrice hessienne $D^2 f(a)$ est définie négative alors f a un maximum local en a.
3. si la matrice hessienne $D^2 f(a)$ n'est ni positive ni négative alors f n'a pas d'extremum en a. On dit que f admet un point selle en a (cf selle de cheval Figure 1.1 droite).

Noter que dans le cas où $D^2 f(a)$ est positive (resp. négative) mais pas définie positive (resp. pas définie négative), "tout peut arriver".

Exemple 3.3.3. *Avec $(x, y) \mapsto x + y^2$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$, $(x, y) \mapsto -x^2 - y^2$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^4$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^4$, on comprend tout...*

Exemple 3.3.4. *On donne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$. Montrer que le point critique $(-1, -1, -1)$ est un point selle.*

Pour $n = 2$ (fonctions de deux variables), $D^2 f(a)$ est une matrice symétrique réelle de taille 2 et il est facile de tester si elle est définie positive, ou définie négative, ou ni positive ni négative. On peut retenir la méthodologie suivante.

Corollaire 3.3.5 (Recherche d'extrema pour fonction de 2 variables)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable sur U et $(x_0, y_0) \in U$ un point critique de f, c'est à dire*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Supposons f deux fois différentiable en (x_0, y_0). Alors le déterminant de la matrice hessienne $D^2 f(x_0, y_0)$ (qu'on appelle le Hessien de f en (x_0, y_0)) et la trace de la matrice hessienne $D^2 f(x_0, y_0)$ disent "beaucoup"... Précisément :

1. *Si DET $D^2 f(x_0, y_0) > 0$ et TR $D^2 f(x_0, y_0) > 0$ alors f a un minimum local en (x_0, y_0).*
2. *Si DET $D^2 f(x_0, y_0) > 0$ et TR $D^2 f(x_0, y_0) < 0$ alors f a un maximum local en (x_0, y_0).*
3. *Si DET $D^2 f(x_0, y_0) < 0$ alors f admet un point selle en a.*

Evidemment pour le cas dégénéré DET $D^2 f(x_0, y_0) = 0$, il n'y a pas de conclusion définitive.

Exemple 3.3.6. *Déterminer les extrema de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.*

3.4 Formule de Taylor intégral à l'ordre 2

La formule de Taylor intégral est une formule *exacte* et *globale*. Elle réclame des hypothèses plus fortes que celles qui permettent d'obtenir la formule locale de Taylor-Young.

Théorème 3.4.1 (Taylor intégral à l'odre 2 pour f à valeurs réelles). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^2 sur U. Soit un segment $[a, a+h] \subset U$. Alors*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + df_a(h) + \int_0^1 (1-t) d^2 f_{a+th}(h,h) dt \qquad (3.7) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) dt. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse "classe C^2" (plus forte que les hypothèses du Théorème 3.3.1), grâce à Taylor intégral ci-dessus on retrouve la formule de Taylor-Young du Théorème 3.3.1.

3.5 Différentielles d'ordre supérieur

En Section 3.1, on a défini la différentielle seconde. Il n'y a aucune raison de s'arrêter en si bon chemin : prenons $f : U \subset E \to F$ deux fois différentiable sur U. On dispose donc de l'application

$$\begin{aligned} d^2 f : U \subset E &\to \mathcal{B}IL(E \times E, F) \\ x &\mapsto d^2 f_x. \end{aligned}$$

Si, pour un $a \in U$ fixé, l'application $d^2 f$ est différentiable au point a, on dira que f est trois fois différentiable en a. L'application différentielle troisième en a, notée $d^3 f_a$, est trilinéaire symétrique, c'est à dire que, pour toute permutation σ de $\{1, 2, 3\}$,

$$d^3 f_a(h_{\sigma(1)}, h_{\sigma(2)}, h_{\sigma(3)}) = d^3 f_a(h_1, h_2, h_3), \quad \forall (h_1, h_2, h_3) \in E^3.$$

Puis, pour tout $k \geq 1$, on peut donner un sens à "f est k fois différentiable en a". En cas d'existence, $d^k f_a$ est k linéaire symétrique.

Pour conclure, signalons que :

- la formule Taylor-Young à l'ordre 2 du Théorème 3.3.1 se généralise à l'ordre $p \geq 3$: si f est $p-1$ fois différentiable sur U et p fois différentiable en a alors la conclusion (3.6) est remplacée par

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} d^k f_a(h, \cdots, h) + \|h\|^p \varepsilon(h).$$

- la formule Taylor intégral à l'ordre 2 du Théorème 3.4.1 se généralise à l'ordre $p+1 \geq 3$: si f est de classe C^{p+1} sur U alors la conclusion (3.7) est remplacée par

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} d^k f_a(h, \cdots, h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} d^{p+1} f_{a+th}(h, \cdots, h) dt.$$

3.6 Exercices

Exercice 3.6.1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ existent, et les calculer.*

2. *Les dérivées partielles secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ *existent-elles ? Qu'observe-t-on ? Que peut-on en conclure ?*

Exercice 3.6.2. *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les extrema locaux et globaux.*

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$.
2. $f(x,y) = (x-y)e^{xy}$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$.
3. $f(x,y) = x^2 + ay^4$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$, *où* a *est un paramètre réel.*
4. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 2$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$.
5. $f(x,y,z) = (x+y)e^{x+y-z^2}$ *définie sur* $\mathbb{R}^3$.
6. $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ *définie sur le rectangle* $[0,3] \times [0,2] \subset \mathbb{R}^2$.

Exercice 3.6.3. *On donne* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = y^2 - x^2 y + x^2.$$

1. *Déterminer les points critiques de* f.
2. *On définit maintenant*

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

   Faire un dessin. Montrer que f *admet un maximum et un minimum sur* C. *Les déterminer.*

Exercice 3.6.4.
1. *Montrer que si une fonction continue* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *possède deux maxima locaux, alors elle possède également au moins un minimum local.*
2. *Etudier les extrema de* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2 y - x - 1)^2$. *Quelle conclusion en tirer ?*

Exercice 3.6.5.
1. *Montrer que si une fonction continue* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *admet un unique extremum local, alors cet extremum est nécessairement un extremum global.*
2. *Etudier les extrema de* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ *sur* $\mathbb{R}^2$. *Quelle conclusion en tirer ?*

Exercice 3.6.6.
1. *Trouver un exemple de fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *deux fois différentiable à l'origine, telle que* $df(0) = 0$ *et* $d^2 f(0) = 0$, *et admettant un minimum local non strict en* 0.
2. *Même question mais avec, cette fois, un minimum local strict en* 0.
3. *Même question mais avec, cette fois, pas d'extremum local en* 0.

Exercice 3.6.7 (Le Laplacien)**.** *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2. *On définit le "Laplacien de* f*" par :*

$$\Delta f(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x).$$

Soit $B = B(0,1)$ *la boule unité ouverte de* $\mathbb{R}^n$, *de centre* 0 *et de rayon* 1, *pour la norme euclidienne* $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

1. *Relier* $\Delta f(x)$ *à la matrice Hessienne Hess* $f(x)$.

2. *On suppose dans cette question que* $\Delta f(x) > 0$ *pour tout* $x \in B$*. On veut montrer que*

$$f(x) < \max_{\|y\|=1} f(y), \quad \forall x \in B.$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un $x \in B$ *pour lequel* $f(x) \geq max_{\|y\|=1} f(y)$*.*
(a) *Montrer que* f *admet un maximum local en un point* $x_0 \in B$*.*
(b) *En déduire une contradiction en utilisant la propriété suivante : si une matrice symétrique définit une forme quadratique négative, alors la trace de cette matrice est négative ou nulle.*

3. *On suppose maintenant que* $\Delta f(x) = 0$ *pour tout* $x \in B$ *(on dit que* f *est* harmonique *sur* B*). On veut montrer que*

$$\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y), \quad \forall x \in B.$$

(a) *Pour* $\varepsilon > 0$*, on pose* $f_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon\|x\|^2$*. Appliquer la question précédente et faire tendre* ε *vers* 0 *pour montrer l'inégalité "de droite".*
(b) *Comment montrer l'autre inégalité ?*

Exercice 3.6.8 (Laplacien en polaires)**.** *On se donne* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *et* $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$*. On définit* $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *par*

$$F(r, \theta) = f \circ \varphi(r, \theta).$$

Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, $\frac{\partial F}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$*, en fonction de celles de* f*, et montrer que*

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta),$$

soit encore $\Delta f(x, y) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta)$*.*

Exercice 3.6.9. *Trouver les* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *telles que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On pourra poser $F(u, v) = f(u + v, u - v)$*.*

Exercice 3.6.10. *On donne* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2*. Soit* $c \in \mathbb{R}^*$*. Montrer que* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$u(t, x) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

vérifie l'équation des ondes

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}u(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \; \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Chapitre 4

Les théorèmes pour “inverser”

4.1 Le théorème des fonctions implicites

4.1.1 Un cas simple mais éclairant ($f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

On condidère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, disons de classe C^1, et on s'intéresse aux points (x, y) du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ d'annulation de f :

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}.$$

On suppose que Γ est non vide. On prend un point référence $(x_0, y_0) \in \Gamma$ et on se demande si, localement, les points (x, y) de Γ peuvent être décrits pas $y = \varphi(x)$ où φ est une fonction définie et de classe C^1 sur un voisinage de x_0. C'est notre objectif 1.

Par exemple si

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

Γ n'est autre que le cercle de centre O de coordonnées $(0, 0)$ et de rayon 1. On comprend sur le dessin que notre objectif 1 est atteignable si $(x_0, y_0) \neq (-1, 0)$ et $(x_0, y_0) \neq (1, 0)$ et, dans ce cas, on a même une expression explicite de la fonction φ recherchée :
• pour un point $(x_0, y_0) \in \Gamma$ avec $y_0 > 0$ on a

$$\Big((x, y) \in]-1, 1[\times]0, 1] \text{ et } f(x, y) = 0\Big) \Longleftrightarrow y = \sqrt{1 - x^2},$$

et $\varphi :]-1, 1[\to]0, 1]$ est définie par $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
• pour un point $(x_0, y_0) \in \Gamma$ avec $y_0 < 0$ on a

$$\Big((x, y) \in]-1, 1[\times[-1, 0[\text{ et } f(x, y) = 0\Big) \Longleftrightarrow y = -\sqrt{1 - x^2},$$

et $\varphi :]-1, 1[\to [-1, 0[$ est définie par $\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.
En revanche, l'objectif 1 ne peut etre atteint si $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ ou $(x_0, y_0) = (1, 0)$ car, en ces points, les tangentes au cercle sont verticales ce qui vient du fait que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\pm 1, 0) = 0.$$

Dans les cas généraux, la fonction φ, lorsqu'elle existe, n'est pas explicite. Malgré cela, on aimerait calculer ses éventuelles dérivées, ce qui permet par exemple de mieux la comprendre, notamment localement via disons une formule de Taylor-Young. Notons qu'en dérivant formellement

$$f(x, \varphi(x)) = 0,$$

on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))=0, \tag{4.1}$$

et donc

$$\varphi'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))},$$

sous réserve que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\neq 0$ mais ça on l'avait déjà pressenti ci-dessus...

Proprement cela donne :

Théorème 4.1.1 (Théorème des fonctions implicites pour $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$)**.** *Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^k ($k\geq 1$) sur l'ouvert Ω. On suppose que $(x_0,y_0)\in\Omega$ est tel que*

$$f(x_0,y_0)=0 \ \ et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0.$$

Alors il existe $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\beta_1>0$, $\beta_2>0$ et une fonction $\varphi:]x_0-\alpha_1,x_0+\alpha_2[\to]y_0-\beta_1,y_0+\beta_2[$ tels que

$$\Big((x,y)\in]x_0-\alpha_1,x_0+\alpha_2[\times]y_0-\beta_1,y_0+\beta_2[\ \ et\ f(x,y)=0\Big)\Longleftrightarrow y=\varphi(x).$$

De plus cette fonction φ hérite de la régularité de f : elle est de classe C^k et

$$\varphi'(x)=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))},$$

pour tout $x\in]x_0-\alpha_1,x_0+\alpha_2[$. Si $k\geq 2$ on peut calculer les dérivées successives de φ en dérivant (4.1)*. Par exemple, pour la dérivée seconde, on trouve*

$$\varphi''(x)=\frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\varphi(x))-2\varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,\varphi(x))-(\varphi'(x))^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}, \tag{4.2}$$

pour tout $x\in]x_0-\alpha_1,x_0+\alpha_2[$.

Dans la situation du théorème ci-dessus on dit que $f(x,y)=0$ définit, au voisinage de (x_0,y_0), y comme fonction implicite de x.

Exemple 4.1.2. *Montrer que la relation $x^4+x^3y^2-y+y^2+y^3=1$ définit y comme fonction de x au voisinage du point $(-1,1)$. Quelle est l'allure de Γ en ce point ?*

Application géométrique. On se donne $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1 et un point (x_0,y_0) dans Γ. Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ alors, localement, on peut tirer y en fonction de x (implicitement). Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ mais que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ alors, localement, on peut tirer x en fonction de y (implicitement). Dans le cas ennuyeux

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0,$$

on dit que (x_0,y_0) est un point critique de f. Ainsi

$$(x_0,y_0)\text{ point critique de } f\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,f(x_0,y_0)=0_{\mathbb{R}^2}.$$

Exemple 4.1.3. *Quid de $f(x,y)=x^2-y^2$? Faire un dessin.*

Définition 4.1.4 (Courbe régulière du plan $\mathbb{R}^2$). *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^k $(k \geq 1)$. On dit que*

$$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 0\}$$

est une courbe régulière de classe C^k du plan $\mathbb{R}^2$ si

$$\Gamma \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in \Gamma,\ \overrightarrow{Grad}\, f(x,y) \neq 0_{\mathbb{R}^2}.$$

On dit alors que $f(x,y) = 0$ est une équation cartésienne de la courbe régulière Γ.

Définition 4.1.5 (Arc paramétré de $\mathbb{R}^2$). *Un arc paramétré de classe C^k $(k \geq 1)$ sur $\mathbb{R}^2$ est une application $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^k, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. L'arc est dit régulier si $\gamma'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Enfin l'ensemble $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^2$ est appelé support de l'arc paramétré.*

La moralité de ce qui précède est que toute courbe régulière est, en tout point, localement décrite par un arc paramétré régulier avec

$$\gamma(x) = (x, \varphi(x)) \text{ ou } \gamma(y) = (\psi(y), y).$$

Ainsi toute courbe régulière de $\mathbb{R}^2$ est, localement, un objet de dimension 1. D'autre part, la tangente à Γ en $(x_0, y_0) \in \Gamma$ est la droite passant par (x_0, y_0) et de vecteur normal $\overrightarrow{\text{Grad}}\, f(x_0, y_0)$, soit la droite d'équation

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

4.1.2 Le cas $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Précédemment on regardait des "courbes" du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation $f(x,y) = 0$ et on essayait de les décrire implicitement par $y = \varphi(x)$ où $\varphi : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ici on va regarder des "surfaces" de l'espace $\mathbb{R}^3$ d'équation $f(x,y,z) = 0$ et on essaie de les décrire implicitement par $z = \varphi(x,y)$ où $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Théorème 4.1.6 (Théorème des fonctions implicites pour $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$). *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^k $(k \geq 1)$ sur l'ouvert Ω. On suppose que $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ est tel que*

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Alors il existe un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) (donc dans $\mathbb{R}^2$), un voisinage ouvert V de z_0 (donc dans $\mathbb{R}$) et $\varphi : U \to V$ tels que

$$\Big((x,y,z) \in U \times V \text{ et } f(x,y,z) = 0\Big) \iff z = \varphi(x,y).$$

De plus cette fonction φ hérite de la régularité de f : elle est de classe C^k et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}, \tag{4.4}$$

pour tout $(x,y) \in U$, qu'on peut aussi écrire

$$\overrightarrow{Grad}\, \varphi(x,y) = -\frac{1}{f'_{x,y,\bullet}(\varphi(x,y))}\overrightarrow{Grad}\, f_{\bullet,\bullet,\varphi(x,y)}(x,y),$$

avec des notations à préciser en cours...

Exemple 4.1.7. *Montrer que la relation $x+y+z+\sin(xyz)=0$ définit z comme fonction de x et de y au voisinage du point $(0,0,0)$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en $(x,y)=(0,0)$.*

Application géométrique. Dans $\mathbb{R}^2$ les courbes régulières sont localement paramétrées par un arc régulier. Sans surprise, dans $\mathbb{R}^3$ les surfaces régulières sont localement paramétrées par une nappe régulière.

Définition 4.1.8 (Surface régulière de l'espace $\mathbb{R}^3$)**.** *Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de classe C^k ($k\geq 1$). On dit que*

$$\Gamma := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, f(x,y,z)=0\}$$

est une surface régulière de classe C^k de l'espace $\mathbb{R}^3$ si

$$\Gamma\neq\emptyset \quad et \quad \forall (x,y,z)\in\Gamma,\ \overrightarrow{Grad}\, f(x,y,z)\neq 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On dit alors que $f(x,y,z)=0$ est une équation cartésienne de la surface régulière Γ.

Définition 4.1.9 (Nappe paramétrée de $\mathbb{R}^3$)**.** *Une nappe paramétrée de classe C^k ($k\geq 1$) sur $\mathbb{R}^3$ est une application $S:\Omega\to\mathbb{R}^3$ de classe C^k, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La nappe est dite régulière si $dS(x,y)$ est de rang 2 pour tout $(x,y)\in\Omega$. Enfin l'ensemble $S(\Omega)\subset\mathbb{R}^3$ est appelé support de la nappe paramétrée.*

La moralité de ce qui précède est que toute surface régulière est, en tout point, localement décrite par une nappe paramétrée réguliere, avec

$$S(x,y)=(x,y,\varphi(x,y)) \text{ ou } S(x,z)=(x,\psi(x,z),z) \text{ ou } S(y,z)=(\theta(y,z),y,z).$$

Ainsi toute surface régulière de $\mathbb{R}^3$ est, localement, un objet de dimension 2. D'autre part, le plan tangent à Γ en $(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$ est le plan passant par (x_0,y_0,z_0) et de vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, f(x_0,y_0,z_0)$, soit le plan d'équation

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=0.$$

4.1.3 Le cas “général” $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$

Théorème 4.1.10 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ de classe C^k ($k\geq 1$) sur l'ouvert Ω. On suppose que $(x_0,y_0)\in\Omega$ (avec $x_0\in\mathbb{R}^n$ et $y_0\in\mathbb{R}^p$) est tel que*

$$f(x_0,y_0)=0_{\mathbb{R}^p} \quad et \quad df_{x_0,\bullet}(y_0)\in\mathcal{GL}(\mathbb{R}^p).$$

Alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 (donc dans $\mathbb{R}^n$), un voisinage ouvert V de y_0 (donc dans $\mathbb{R}^p$) et une fonction $\varphi:U\to V$ tels que

$$\Big((x,y)\in U\times V \text{ et } f(x,y)=0\Big)\Longleftrightarrow y=\varphi(x).$$

De plus cette fonction φ hérite de la régularité de f : elle est de classe C^k et, pour tout $x\in U$,

$$\underbrace{d\varphi(x)}_{\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)} = -\underbrace{(df_{x,\bullet}(\varphi(x)))^{-1}}_{\in\mathcal{GL}(\mathbb{R}^p)}\circ\underbrace{df_{\bullet,y}(x)}_{\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)},$$

ce qui donne notamment accès aux dérivées partielles de φ...

Une preuve possible de ce théorème utilise le théorème du point fixe de Banach (dont on reparlera au Chapitre **??**).

Exemple 4.1.11. *Dans $\mathbb{R}^3$ soit S_1 la surface d'équation $x^2+y^2-2z^2-1=0$ et S_2 celle d'équation $x^2+2y^2+z^2=5$. Appliquer le théorème des fonctions implicites autour du point $\left(1,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ qui est sur $S_1\cap S_2$.*

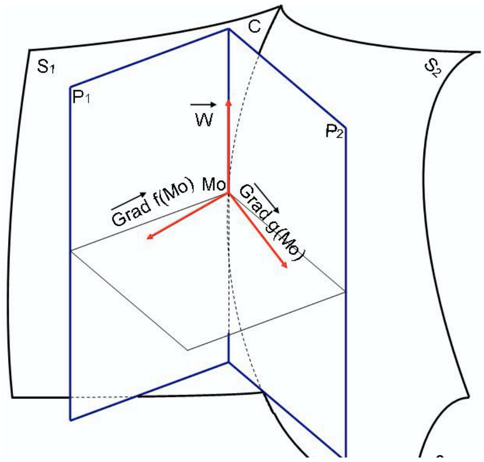

FIGURE 4.1 – Une intersection de surfaces régulières S_1 (d'équation cartésienne $g(x,y,z) = 0$) et S_2 (d'équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$) donnant une courbe régulière C, cf https ://fr.wikipedia.org/wiki/Surface.

4.2 Les théorèmes d'inversion

Définition 4.2.1 (C^k difféomorphisme)**.** *Soit $k \geq 1$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit que f est un C^k difféomorphisme de U sur V si*

(i) f est une bijection de U sur V,

(ii) f est de classe C^k sur U,

(iii) f^{-1} est de classe C^k sur V.

Exemple 4.2.2. *$x \mapsto \tan x$ est un C^∞ difféomorphisme de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. En revanche $x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 4.2.3. *Supposons qu'il existe un C^k difféomorphisme ($k \geq 1$) f de $U \subset \mathbb{R}^n$ sur $V \subset \mathbb{R}^p$. Alors*

1. *$n = p$.*
2. *Pour tout $x \in U$, df_x est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$, cad $df_x \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$, et pour tout $y \in V$, $d(f^{-1})_y$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$, cad $d(f^{-1})_y \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$, et*
$$d(f^{-1})_y = (df_{f^{-1}(y)})^{-1}.$$

Théorème 4.2.4 (Théorème d'inversion locale)**.** *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geq 1$) sur l'ouvert Ω. On suppose que $x_0 \in \Omega$ est tel que*

$$df_{x_0} = f'(x_0) \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n),$$

soit encore $Df(x_0) \in GL_n(\mathbb{R})$ (la matrice jacobienne est inversible).

Alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 et un voisinage ouvert V de $y_0 = f(x_0)$ tels que

$$f \text{ est un } C^k \text{ difféomorphisme de } U \text{ sur } V.$$

Une preuve possible de ce théorème utilise encore le théorème du point fixe de Banach (dont on reparlera au Chapitre **??**).

Exemple 4.2.5. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x,y) = (x+y, x-y)$. Décrire U l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ autour desquels f est un C^1 difféomorphisme local. Même question pour $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$.*

ATTENTION, l'inversion locale n'a qu'une valeur locale... Il est possible qu'on puisse inverser partout localement mais pas globalement, notamment car l'injectivité “locale” n'implique pas l'injectivité “globale”...

Exemple 4.2.6. *Considérer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Montrer que “on a difféomorphisme local autour de tout point (x_0, y_0)” mais que f n'est pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$.*

Néanmoins si on ajoute l'hypothèse d'injectivité on récupère un difféomorphisme global de Ω sur l'image de Ω par f (il faut bien récupérer la surjectivité !).

Théorème 4.2.7 (Théorème d'inversion globale)**.** *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k $(k \geq 1)$ sur l'ouvert Ω. On suppose que*

$$f \text{ est injective et } \forall x \in \Omega, df_x = f'(x) \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n).$$

Alors

$$f \text{ est un } C^k \text{ difféomorphisme de } \Omega \text{ sur } \Omega' := f(\Omega).$$

Exemple 4.2.8. *Le “passage en polaires”*

$$(r, \theta) \mapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$$

est un C^∞ difféomorphisme de $U =]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ sur $V = \mathbb{R}^2 \setminus [0,+\infty[\times\{0\}$. La bijection réciproque “passage en cartésiennes” est

$$(x,y) \mapsto (r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta = \textit{faisable mais pénible à écrire...}).$$

4.3 Exercices

Théorème des fonctions implicites

Exercice 4.3.1. *En dérivant* (4.1)*, aboutir à* (4.2)*.*

Exercice 4.3.2. *Montrer que*

$$\forall n \geq 0, \exists! u_n \in \mathbb{R}, u_n^5 + n u_n - 1 = 0.$$

Montrer que $0 < u_n < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Afin de faire mieux, on peut utiliser le Théorème 4.1.1 : montrer qu'on peut écrire

$$u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \frac{e}{n^4} + \frac{f}{n^5} + \frac{g}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right), \qquad \textit{quand } n \to +\infty,$$

avec des réels a, b, c, d, e, f, g à déterminer.

Exercice 4.3.3. *D'où sort* (4.3) *?*

Exercice 4.3.4. *Soit C la “courbe” de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation*

$$x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0.$$

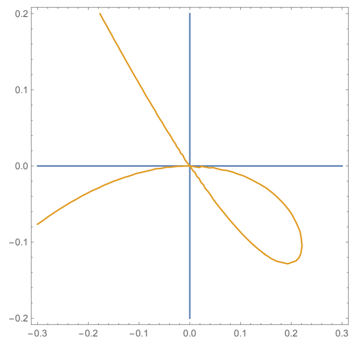

FIGURE 4.2 – Le point double de l'Exercice 4.3.7.

1. *Montrer que, au voisinage du point* $(0,0)$*, l'ordonnée* y *d'un point de* C *est définie implicitement comme une fonction, de classe* C^∞*, de* x*. On note* φ *une telle fonction.*
2. *Calculer les dérivées première et seconde de* φ *en* 0*.*
3. *Donner l'allure de la courbe* C *au voisinage du point* $(0,0)$*.*

Exercice 4.3.5. *Soit* C *la "courbe" de* $\mathbb{R}^2$ *définie par l'équation*

$$x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0.$$

Vérifier que $a = (1,1)$ *est sur* C*. Trouver la tangente à* C *en* a*. Déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en* a*.*

Exercice 4.3.6. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = 2\cos^2 x + xy - e^y.$$

1. *Montrer qu'il existe un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$ *contenant* 0 *tel que, pour tout* x *dans* I*, il existe un unique* $y > 0$*, que tel que* $f(x,y) = 0$*. On note* $\varphi(x)$ *un tel* y*.*
2. *Montrer que la fonction* $x \in I \mapsto \varphi(x) \in]0,+\infty[$ *est de classe* C^1*.*
3. *Montrer que* $\varphi'(0) = \frac{\ln 2}{2}$*.*
4. *Montrer que, pour tout* $x \in I$*, on a*

$$\varphi'(x)(e^{\varphi(x)} - x) = \varphi(x) - 4\sin x \cos x.$$

Exercice 4.3.7 (Un point double)**.** *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$x^3 + xy + y^2 e^{x+y} = 0.$$

Montrer qu'il existe deux fonctions distinctes φ_1 *et* φ_2 *de classe* C^1 *sur un voisinage ouvert* I *de 0 telles que, pour* $i = 1$ *et* $i = 2$*,* $f(x, \varphi_i(x)) = 0$ *pour tout* $x \in I$ *(on pourra poser* $y = xz$ *et "impliciter autour de deux* z *bien choisis"). Préciser l'allure du graphe de* φ_i *autour de* $(0,0)$*. Vérifier que c'est cohérent avec la Figure 4.2.*

Exercice 4.3.8. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1).$$

On note C *la "courbe" de* $\mathbb{R}^3$ *définie par l'équation* $f(x,y,z) = 0$*.*

1. *Vérifier que le point* $a = (1,1,1) \in C$*.*

2. *Montrer qu'il existe un intervalle ouvert* $I \subset \mathbb{R}$ *contenant* 1*, une* $B \subset \mathbb{R}^2$ *de centre* $(1,1)$*, et une fonction* $\varphi : I \to B$ *tels que :* $(x,y,z) \in C \cap I \times B$ *si et seulement si* $(y,z) = \varphi(x)$*.*
3. *Déterminer la tangente à* C *en* a*.*

Exercice 4.3.9. *Soit* C *la “courbe” de* $\mathbb{R}^3$ *définie par les équations*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \quad \text{et} \quad x^3 + y^3 + z^3 = 36.$$

Montrer que $(1,2,3) \in C$*. Montrer que, dans un voisinage de ce point, les points de* C *peuvent s'écrire* $(y,z) = \varphi(x)$ *où* φ *est de classe* C^1*. Préciser la tangente en chaque point.*

Exercice 4.3.10. *Montrer que l'équation* $z^3 + 2z + e^z - x - y^2 = \cos(x - y + z)$ *définit implicitement* z *comme fonction* C^1 *de* x *et* y *au voisinage du point* $(0,0,0)$*. Calculer les dérivées partielles de* z *à l'ordre* 2 *en* 0*.*

Théorèmes d'inversion locale et globale

Exercice 4.3.11. *L'application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x,y) = (x^3 - 2xy^2, x + y)$ *est-elle un difféomorphisme local en* $a = (1,-1)$ *? Si oui, écrire la différentielle de son inverse local au point* $b = f(a)$ *?*

Exercice 4.3.12. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *l'application définie par* $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$*.*

1. *Décrire* ω *l'ensemble des points de* $\mathbb{R}^2$ *autour desquels* f *est un difféomorphisme local.*
2. *Est ce que* f *restreinte à* ω *est un difféomorphisme sur son image ?*
3. *Pour tout point* a *de* ω*, écrire la différentielle de l'inverse local de* f *au point* $f(a)$*, et trouver un voisinage ouvert* U *de* a *tel que* $f_{|U}$ *soit un difféomorphisme sur son image.*

Exercice 4.3.13 (Coordonnées polaires)**.** *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *l'application définie par*

$$f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

1. *Décrire* ω *l'ensemble des points de* $\mathbb{R}^2$ *autour desquels* f *est un difféomorphisme local.*
2. *Pour tout point* a *de* ω*, écrire la différentielle de l'inverse local de* f *au point* $f(a)$*.*
3. *Est ce que* f *restreinte à* ω *est un difféomorphisme sur son image ?*
4. *Montrer que* f *est un* C^∞ *difféomorphisme de* $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus ([0,+\infty[\times\{0\})$*.*

Exercice 4.3.14 (Coordonnées sphériques)**.** *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$f(r,\theta,\delta) = (r\cos\theta\cos\delta, r\sin\theta\cos\delta, r\sin\delta).$$

1. *Décrire* ω *l'ensemble des points de* $\mathbb{R}^3$ *autour desquels* f *est un difféomorphisme local.*
2. *Pour tout point* a *de* ω*, écrire la différentielle de l'inverse local de* f *au point* $f(a)$*.*
3. *Est ce que* f *restreinte à* ω *est un difféomorphisme sur son image ?*
4. *Montrer que* f *est un* C^∞ *difféomorphisme de* $]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *sur* $\mathbb{R}^3 \setminus ([0,+\infty[\times\{0\}\times\mathbb{R})$*.*

Exercice 4.3.15. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

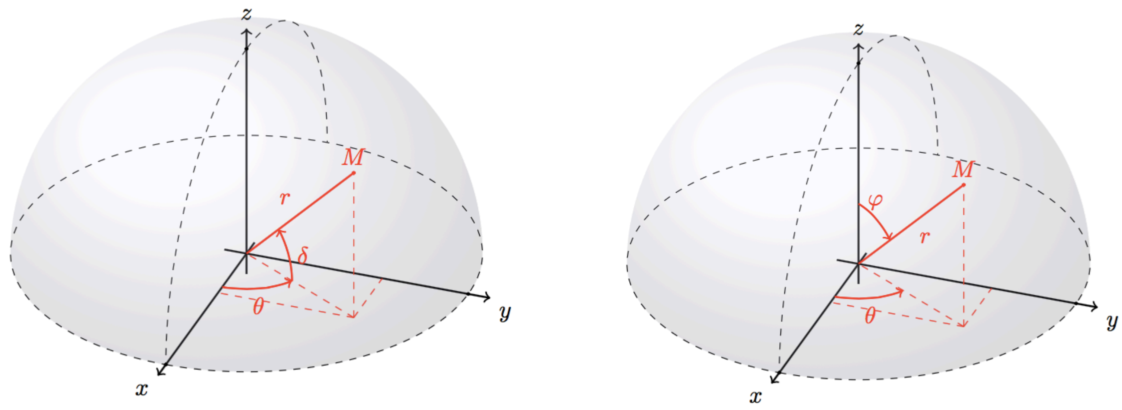

FIGURE 4.3 – Coordonnées sphériques. A gauche la convention (r, θ, δ) rayon-longitude-latitude comme dans l'Exercice 4.3.14. A droite la convention (r, θ, φ) rayon-longitude-colatitude.

1. *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f'(0) \neq 0$.*
2. *Si n est un entier non nul, montrer que*
$$f'\left(\frac{1}{2n}\right) f'\left(\frac{1}{2n+1}\right) < 0,$$
et en déduire que f n'est injective sur aucun intervalle contenant 0, aussi petit soit-il.
3. *Commentaires ?*

Exercice 4.3.16 (Fonction "propre"). *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. On dit que f est* propre *si l'image réciproque de tout compact de $\mathbb{R}^p$ par f est compacte dans $\mathbb{R}^n$.*

1. *Les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont elles propres*[1] $x \mapsto 0$, $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto x^2$. *Quid de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$?*
2. *Si f est propre et continue, montrer que f est* fermée *(i.e. l'image d'un fermé est fermée). On pourra montrer que, si F est fermé dans $\mathbb{R}^p$, alors $f(F)$ est séquentiellement fermé.*
3. *On suppose que f est injective, propre, de classe C^1, et est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^p$ (en particulier, $n = p$). Montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 4.3.17. *Pour a et b réels, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*
$$f(x, y) = (x + a\sin y, y + b\sin x).$$

1. *Pour quelles valeurs de (a, b) f est-elle un difféomorphisme local en tout point ?*
2. *Montrer alors que f est injective.*
3. *Montrer alors que f est propre (cf Exercice 4.3.16).*
4. *Montrer alors que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 4.3.18. *Montrer que si $f \in C^1(\mathbb{R})$ et s'il existe $k > 0$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > k$, alors f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui même (on pourra, par exemple, montrer que f est propre). Montrer que ce résultat est faux avec $k = 0$.*

1. Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue on peut montrer que f est propre si et seulement si $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$

Exercice 4.3.19. *On considère une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, telle que*

$$\|f(y) - f(x)\| \geq k\|y - x\| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

pour une certaine constante $k > 0$ et une norme quelconque (on dit que f est k-dilatante pour la norme en question). On veut montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. *Montrer que f est injective.*
2. *Montrer que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$ (par exemple en montrant qu'elle est séquentiellement fermée).*
3. *Montrer que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et en déduire que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est ouverte dans $\mathbb{R}^n$.*
4. *Conclure.*

Exercice 4.3.20.

1. *Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A^2$ est de classe C^1, et déterminer sa différentielle en tout point.*
2. *Montrer que toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suffisamment proche de la matrice identité "admet une racine carrée".*

Chapitre 5

Extrema liés

Dans tout ce chapitre, on désignera par U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On va considérer des fonctions f à valeurs réelles

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

et s'intéresser à ses extrema. Dans le Chapitre 3 on s'est intéressé aux extrema dits *libres*, par opposition aux extrema *liés*, ou *sous contrainte*, auxquels on va s'intéresser ici.

5.1 Un exemple/exercice naïf

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation

$$(x-2)^2 + 2y^2 = 6.$$

On cherche les points de $\mathcal{E}$ les plus proches et les plus éloignés de l'origine $O(0,0)$. Faites un dessin et “devinez” la réponse.

Formalisons un peu tout cela. On cherche les extrema de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

sous la <u>contrainte</u> $g(x,y) = 0$, où $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par

$$g(x,y) = (x-2)^2 + 2y^2 - 6.$$

Montrez que $\mathcal{E}$ est compact. En déduire que $\min_{(x,y)\in\mathcal{E}} f(x,y)$ et $\max_{(x,y)\in\mathcal{E}} f(x,y)$ existent bien. On admet alors ce que nous a suggéré le dessin (et qui sera démontré dans la Section 5.2) : s'il y a un <u>extremum lié</u> en (x,y) alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé <u>multiplicateur de Lagrange</u>) tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, f(x,y) = \lambda \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, g(x,y).$$

Trouvez les éventuels points d'extrema liés, puis concluez.

5.2 Une contrainte, multiplicateur de Lagrange

On parle d'extrémum lié lorsqu'on cherche à maximiser ou minimiser une fonction de plusieurs variables lorsque ces variables sont liées par une relation (ou plusieurs, cf ci-dessous).

Définition 5.2.1 (Extremum lié). *Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$ tel que $g(a) = 0$.*

On dit que a est un point de minimum local de f sous la contrainte g s'il existe un voisinage V de a tel que

$$f(x) \geq f(a), \quad \forall x \in V \cap \Gamma,$$

où l'ensemble $\Gamma := \{x \in U, g(x) = 0\}$ "représente" la contrainte.

On définit évidemment la notion de point de maximum local de f sous la contrainte g par

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in V \cap \Gamma.$$

Théorème 5.2.2 (Multiplicateur de Lagrange)**.** *Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $a \in U$ tel que $g(a) = 0$. On suppose que*

$$\overrightarrow{Grad}\, g(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Si a est un point d'extremum local de f sous la contrainte g alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé multiplicateur de Lagrange) tel que

$$\overrightarrow{Grad}\, f(a) = \lambda \overrightarrow{Grad}\, g(a).$$

La preuve repose sur le théorème des fonctions implicites.

Exemple 5.2.3. *Étudier les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{xy}$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.*

5.3 Plusieurs contraintes, multiplicateurs de Lagrange

Définition 5.3.1 (Extremum lié)**.** *Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et, pour $1 \leq i \leq p$, $g_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$ tel que $g_1(a) = \cdots = g_p(a) = 0$.*

On dit que a est un point de minimum local de f sous les contraintes $g_1, \cdots, g_p$ s'il existe un voisinage V de a tel que

$$f(x) \geq f(a), \quad \forall x \in V \cap \Gamma,$$

où l'ensemble $\Gamma := \{x \in U, \forall 1 \leq i \leq p, g_i(x) = 0\}$ "représente" la contrainte.

On définit évidemment la notion de point de maximum local de f sous les contraintes $g_1, \cdots, g_p$ par

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in V \cap \Gamma.$$

Théorème 5.3.2 (Multiplicateurs de Lagrange)**.** *Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et, pour $1 \leq i \leq p$, $g_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $a \in U$ tel que $g_1(a) = \cdots = g_p(a) = 0$. On suppose que (on dit alors que les contraintes $g_1, \cdots, g_p$ sont indépendantes au point $a \in U$)*

la famille de formes linéaires $\{dg_1(a), \cdots, dg_p(a)\}$ est libre.

Si a est un point d'extremum local de f sous les contraintes $g_1, \cdots, g_p$ alors il existe des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tel que

$$df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \cdots + \lambda_p dg_p(a).$$

La preuve repose sur le théorème des fonctions implicites.

Exemple 5.3.3. *Montrer que, pour toute famille $(v_1, \cdots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$,*

$$|det\ (v_1, \cdots, v_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|_2.$$

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1. *Calculer*

$$\max_{x^2+y^2+z^2=1} x + y + 2z.$$

Exercice 5.4.2. *Trouver les points de la surface* $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y^2 = 9 + xz\}$ *qui sont les plus proches de l'origine de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.4.3. *On donne* $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. *Trouver le volume maximal d'un parallélépipède contenu dans l'ellipsoïde d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Exercice 5.4.4. *Soit* $n \geq 2$ *un entier. On considère* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \Pi_{i=1}^n x_i.$$

On note

$$\Gamma := \{(x_1, \cdots, x_n) \in [0, +\infty[^n, x_1 + \cdots x_n = 1\}.$$

1. *Montrer que* f *admet un maximum global sous la contrainte* Γ *et calculer ce maximum.*
2. *En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout* $(x_1, \cdots, x_n) \in [0, +\infty[^n$ *on a*

$$\underbrace{\Pi_{i=1}^n x_i^{1/n}}_{\text{moyenne géométrique}} \leq \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}_{\text{moyenne arithmétique}}.$$

Exercice 5.4.5. *On considère une matrice symétrique réelle* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. *On sait qu'elle a* n *valeurs propres réelles que l'on note*

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

On considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle.$$

On munit $\mathbb{R}^n$ *de la norme 2, c'est à dire* $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

1. *Montrer que les réels* $\min_{\|x\|=1} f(x)$ *et* $\max_{\|x\|=1} f(x)$ *sont bien définis. Dans la suite, on note* x_{min} *et* x_{max} *deux vecteurs de norme 1 tels que*

$$\min_{\|x\|=1} f(x) = f(x_{min}), \quad \max_{\|x\|=1} f(x) = f(x_{max}).$$

2. *Montrer que* f *est différentiable en tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *et que*

$$df_x(h) = 2\langle Ax, h \rangle, \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

3. *A l'aide du Théorème 5.2.2, montrer que* x_{min} *et* x_{max} *sont forcément des vecteurs propres de* A.
4. *En déduire que*

$$\min_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \lambda_1, \quad \max_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \lambda_n.$$

Chapitre 6

Quid en dimension infinie ?...

Jusqu'ici on a, pour simplifier, travaillé en dimension finie. Que se passe t il dans le cadre plus général des espaces de Banach (= espace vectoriel normé complet) ? Rappelons que

(i) tout espace vectoriel de dimension finie est de Banach.

(ii) si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont 2 Banach alors $\mathcal{L}(E, F)$ (= espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F) muni de la "norme triple" est un Banach.

(iii) si (X, d) est un espace métrique et $(F, \|\cdot\|_F)$ un Banach alors $C^0_b(X, F)$ muni de la "norme du sup" est un Banach. En particulier, si K est un compact de X, $C^0(K, F)$ est un Banach.

Il s'avère qu'une grande partie des choses présentées dans les chapitres précédents se généralise ! Dans le cadre des espaces de Banach, la composition des différentielles, le théorème des accroissements finis, le théorème de Schwartz, les formules de Taylor, le théorème d'inversion locale, le théorème des fonctions implicites, le théorème sur les extrema liés restent valides (avec parfois une micro modification d'écriture). Donnons quelques détails, exemples et applications.

6.1 Différentiabilité

Le Théorème-Définition 2.1.1 est "inchangé".

Théorème-Definition 6.1.1 (Différentiabilité)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach. Soit $f : U \subset E \to F$. Soit $a \in U$. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire continue de E dans F, notée df_a ou $df(a)$, telle que*

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{df_a}_{\in \mathcal{L}(E,F)}(h) + o(h) \quad \textit{quand } h \to 0_E.$$

En cas d'existence une telle application linéaire continue df_a est unique. On dit alors que l'application linéaire df_a est tangente à f en a.

Attention, en dimension infinie, il faut *vraiment* s'assurer que l'application linéaire df_a de E dans F est continue (ce n'est pas "gratuit" comme en dimension finie).

Exercice 6.1.2. *Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$ muni de la norme*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Etudier la différentiabilité de φ dans les cas suivants :

1. $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) := \sin(f(0))$.
2. $\varphi : E \to E$, $\varphi(f) := x \mapsto \int_0^x f^2(t)dt$.
3. $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$, $\varphi(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Exercice 6.1.3. *On considère les espaces*

$$E := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ et vérifiant } f(0) = 0\} \text{ muni de } \|f\|_E := \|f'\|_\infty,$$

et

$$F := C^0([0,1),\mathbb{R}) \text{ muni de } \|f\|_F = \|f\|_\infty,$$

et l'application

$$\varphi : E \to F, \quad \varphi(f) := f' + f^2.$$

1. *Montrer que* $\|f\|_\infty \leq \|f\|_E$ *pour tout* $f \in E$, *que* $\|\cdot\|_E$ *est une norme et que* $(E, \|\cdot\|_E)$ *est un Banach.*
2. *Montrer que* φ *est différentiable et calculer sa différentielle.*
3. *Montrer que* φ *est de classe* C^1.

6.2 Fonctions implicites en dimension infinie, applications

Voici une version du théorème des fonctions implicites “version Espaces de Banach” tirée de [3, Theorem 4.B].

Théorème 6.2.1 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soit* X, Y *et* Z *trois espaces de Banach. On suppose que*

(*i*) $\mathcal{F} : U \subset X \times Y \to Z$ *est définie sur* U *voisinage ouvert de* $(x_0, y_0) \in X \times Y$ *et*

$$\mathcal{F}(x_0, y_0) = 0.$$

(*ii*) *dans* U, $\mathcal{F}$ *admet une dérivée partielle (au sens de Fréchet) par rapport à* y *et*

$$\mathcal{F}_y(x_0, y_0) : Y \to Z \text{ est bijective.}$$

(*iii*) $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}_y$ *sont continues en* (x_0, y_0).

Alors

1. Existence et unicité. *Il existe* $r_0 > 0$ *et* $r > 0$ *tels que, pour tout* $x \in X$ *avec* $\|x - x_0\| \leq r_0$, *il existe un unique* $y(x) \in Y$ *tel que* $\|y - y_0\| \leq r$ *et*

$$\mathcal{F}(x, y(x)) = 0.$$

2. Continuité. *Si* $\mathcal{F}$ *est continue sur un voisinage de* (x_0, y_0) *alors* $x \mapsto y(x)$ *est continue sur un voisinage de* x_0.
3. Régularité supérieure. *Si* $\mathcal{F}$ *est de classe* C^m, $1 \leq m \leq +\infty$, *sur un voisinage de* (x_0, y_0), *alors* $x \mapsto y(x)$ *est de classe* C^m *sur un voisinage de* x_0.

Voici quelques applications pour résoudre des problèmes d'analyse.

Exercice 6.2.2. *Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et 1-périodiques normé par*

$$\|f\|_E := \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty)$$

qui en fait un espace de Banach. Pour $f \in E$, $\tau \in \mathbb{R}$, on note $f_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\tau(x) := f(x+\tau)$. On se donne $g \in E$ non constante et on définit

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : E \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (f, \varepsilon) &\mapsto \mathcal{F}(f,\varepsilon) := \int_0^1 f_\varepsilon(x) g'(x) dx. \end{aligned}$$

1. *Montrer que $\mathcal{F}$ est de classe C^1 et calculer sa différentielle en tout point (f, ε).*
2. *Montrer que, au voisinage de $(g, 0)$, l'égalité $\mathcal{F}(f,\varepsilon) = 0$ équivaut à $\varepsilon = \varphi(f)$, où φ est une fonction de classe C^1.*

Exercice 6.2.3. *On se donne $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $G : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on cherche $u \in C([0,1], \mathbb{R})$ solution de l'équation intégrale*

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x,t) G(t, u(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mettre tout cela dans un cadre qui permet d'appliquer le Théorème des fonctions implicites 6.2.1 et montrer ainsi que, pour $|\lambda|$ assez petit, le problème admet une unique solution. NB : pour montrer le caractère bijectif de $\mathcal{F}_u(0,0)$ on utilisera l'alternative de Fredholm, cf Théorème **??**.

6.3 Extrema liés en dimension infinie, une application

Voici une version du théorème des extrema liés (avec une contrainte) "version Espaces de Banach".

Théorème 6.3.1 (Multiplicateur de Lagrange)**.** *Soit E un espace de Banach. Soient $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ et $g : U \subset E \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $a \in U$ tel que $g(a) = 0$. On suppose que*

$$dg(a) : E \to \mathbb{R} \text{ est surjective (cad non nulle).}$$

Si a est un point d'extremum local de f sous la contrainte g alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé multiplicateur de Lagrange) tel que

$$df(a) = \lambda dg(a).$$

Une application (peut être détaillée en cours) est la recherche d'éléments propres (principaux) du type

$$\begin{cases} -u'' - r(x)u = \lambda u & \text{dans } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

ou, plus généralement,

$$\begin{cases} -\Delta u - r(x)u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] S. Benzoni-Gavage, *Calcul différentiel et équations différentielles*, Dunod, 2010.

[2] R. Danchin, *Cours de calcul différentiel*, Cours de L3 maths, poly disponible sur http ://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/

[3] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. I.*, Springer-Verlag, New York, 1986.