M1 — Equation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$

1 Marche aléatoire

Cf cours.

2 Le noyau de la chaleur

On cherche donc $u = u(t,x)$ solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u = \Delta u, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

1. Montrer que si $u = u(t,x)$ est solution de (1) alors, pour tout $\lambda > 0$, $u(\lambda^2 t, \lambda x)$ l'est aussi.

On cherche une solution de (1) sous la forme auto-similaire :

$$G(t,x) := \frac{1}{t^{N/2}} \varphi\left(\frac{\|x\|}{\sqrt{t}}\right), \tag{2}$$

où $\varphi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ reste à déterminer avec $\varphi'(0) = 0$ et $r \mapsto \varphi(r) r^{N-1} \in L^1(0,+\infty)$.

2. Montrer que la masse de G donnée par (2) est constante au cours du temps.
3. Montrer que φ doit vérifier une EDO linéaire du second ordre.
4. Multiplier l'EDO par r^{N-1} puis la résoudre.

Voici donc

$$\boxed{\text{le noyau de la chaleur :} \quad G(t,x) := \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N,}$$

qui, bien sûr, vérifie l'EDP de la chaleur. De plus c'est une unité approchée :

Théorème 1 (Unité approchée) *On a*

(i) $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, G(t,x) > 0.$
(ii) $\forall t > 0, \int_{\mathbb{R}^N} G(t,x)dx = 1.$
(iii) $\forall \delta > 0, \lim_{t \searrow 0} \int_{\|x\| \geq \delta} G(t,x)dx = 0.$

Noter aussi que, pour tout $1 \leq q \leq +\infty$, tout $t > 0$, $G(t,\cdot) \in L^q(\mathbb{R}^N)$.

3 Le problème de Cauchy

On adjoint maintenant à l'équation de la chaleur (1) une donnée initiale u_0. On considère donc le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^N \\ u(0,\cdot) = u_0 & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

1. Pour simplifier considérons ici le cas $N = 1$. On définit (au moins formellement) :

$$\widehat{u}(t,\xi) := \left(\mathcal{F}(u(t,\cdot))\right)(\xi).$$

   (a) En appliquant (formellement) la transformée de Fourier au problème de Cauchy EDP, montrer qu'on obtient le problème de Cauchy EDO (où ξ est vu comme un paramètre) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\widehat{u}(t,\xi) = -\xi^2 \widehat{u}(t,\xi), & t > 0, \\ \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{u_0}(\xi). \end{cases}$$

(b) En déduire $\widehat{u}(t,\xi)$ puis, en appliquant la transformée de Fourier inverse, $u(t,x)$.

2. Réciproquement, on peut montrer rigoureusement le résultat suivant.

Théorème 2 (La solution du problème de Cauchy chaleur) *Soit $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, on pose*

$$u(t,x) := (G(t,\cdot) * u_0)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} u_0(y)dy. \tag{3}$$

Alors

(i) $u \in C^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N)$ et vérifie (1).

(ii) Si $p \neq +\infty$ alors $u(t,\cdot) \to u_0$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, quand $t \searrow 0$.
Si $p = +\infty$ et que en plus $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$, alors on a $u \in C([0,+\infty[\times\mathbb{R}^N)$ (on a posé $u(0,\cdot) = u_0$).

4 Conséquences

Ici, $u = u(t,x)$, respectivement $v = v(t,x)$, désigne la solution de la chaleur partant de u_0, respectivement v_0, et donnée par la convolution du Théorème 2.

1. Montrer la conservation de la masse, c'est à dire

$$\forall u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N), \forall t > 0, \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)dx.$$

2. Montrer que

$$\boxed{\text{si } \ u_0 \geq 0 \ \text{ alors } \ 0 \leq u(t,x) \leq \min\left(\|u_0\|_\infty, \frac{\|u_0\|_1}{(4\pi t)^{N/2}}\right).}$$

3. Montrer le principe de comparaison :

$$\boxed{\text{si } \ u_0 \leq v_0 \ \text{ alors } \ \forall t > 0, u(t,\cdot) \leq v(t,\cdot)},$$

et même

$$\boxed{\text{si } \ u_0 \leq v_0 \text{ et } u_0 \not\equiv v_0 \ \text{ alors } \ \forall t > 0, u(t,\cdot) < v(t,\cdot)},$$

qui est une propriété de “propagation à vitesse infinie des perturbations”.