M1 — Transformée de Fourier

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on définit $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sa transformée de Fourier (lorsqu'elle existe !) par

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx. \tag{1}$$

On notera aussi parfois $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$. On définit également la transformée de Fourier inverse (lorsqu'elle existe !) par

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

1 Premiers exemples

1. Calculer $\widehat{f}$ lorsque $f(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{(-1,1)}(x)$.
2. Calculer $\widehat{f}$ lorsque $f(x) = \frac{1}{2} a e^{-a|x|}$ $(a > 0)$.
3. Pour $a > 0$, on considère la fonction Gaussienne définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-ax^2}$ et sa transformée de Fourier
$$\widehat{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-ax^2} dx.$$
   (a) Montrer $\widehat{\varphi}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $\widehat{\varphi}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\widehat{\varphi}'(\xi)$ comme une intégrale à paramètre.
   (c) En intégrant par parties l'expression de $\widehat{\varphi}'(\xi)$, trouver un problème de Cauchy linéaire vérifié par $\widehat{\varphi}$.
   (d) Calculer $\widehat{\varphi}(\xi)$. On retient donc que, avec un abus de notation,
$$\boxed{\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{1}{4a}\xi^2}}$$

2 Dans $L^1(\mathbb{R})$

Dans cette section, $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\widehat{f} \in C_b(\mathbb{R})$.
2. On veut montrer que $\lim_{\xi \to \pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ (c'est le lemme de Riemann-Lebesgue).
   (a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. En intégrant par parties montrer que $\lim_{\xi \to \pm\infty} \widehat{\varphi}(\xi) = 0$.
   (b) On rappelle que, pour tout $1 \leq p < +\infty$, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. Conclure.
3. On suppose que $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer alors que $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ et
$$\boxed{\widehat{f}\,'(\xi) = -i\mathcal{F}(xf(x)).}$$
4. Montrer le théorème suivant.

Théorème 1 (Fourier et convolution) *Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors*

$$\boxed{\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}.}$$

5. Montrer la formule dite d'échange : si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) g(y) dy.$$

6. Comme le montre le premier exemple ci-dessus, il se peut que $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$. Lorsque $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on peut définir $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$ qui "reconstruit" f, comme on va le maintenant le montrer.
   (a) On considère la famille de gaussiennes
   $$\varphi_\alpha(x) := \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha}} e^{-\frac{1}{2\alpha}x^2}, \quad \alpha > 0.$$
   Montrer que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi_\alpha)) = 2\pi\varphi_\alpha$.
   (b) On considère $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi_\alpha * g)) = 2\pi\varphi_\alpha * g$.
   (c) On considère $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
   Rappel : $(\varphi_\alpha)_{\alpha \searrow 0}$ est une approximation de l'unité. Ainsi :
   $$\lim_{\alpha \to 0} \|\varphi_\alpha * f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0,$$
   ce qui implique qu'il existe une suite $\alpha_n \to 0$ telle que
   $$\varphi_{\alpha_n} * f \to f \text{ presque partout.}$$
   Montrer que
   $$\lim_{n \to +\infty} \|\mathcal{F}(\varphi_{\alpha_n} * f) - \mathcal{F}(f)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$
   En déduire que
   $$\lim_{n \to +\infty} \|\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\varphi_{\alpha_n} * f)\right) - \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f)\right)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0,$$
   puis prouver le résultat suivant.

Théorème 2 (Inversion) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors*
$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = 2\pi f.}$$

7. En déduire que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ est injective, mais pas surjective.

3 Dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

On se place ici dans l'espace de Schwartz
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f^{(q)}(x)| < +\infty\},$$
dit aussi "espace des fonctions à décroissance rapide".

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $x \mapsto x^p f^{(q)}(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
3. Montrer le théorème suivant.

Théorème 3 (Fourier et Schwartz) $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est une bijection.*

4 Dans $L^2(\mathbb{R})$

On admet le théorème suivant.

Théorème 4 (Plancherel) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et*
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

On voudrait maintenant définir la transformée de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R})$ pour laquelle la formule (1) ne fait pas forcément sens. La densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ va nous permettre de montrer le résultat suivant.

Théorème 5 (Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$) *La transformée de Fourier $\mathcal{F}$, définie sur $L^1(\mathbb{R})$, se prolonge continûment de manière unique en "la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$" (qu'on renote $\mathcal{F}$). De plus $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est un isomorphisme et une isométrie (à coefficient multiplicatif près) :*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi)d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)dx.$$

1. En considérant $f_n := \mathbf{1}_{(-n,n)}f$, montrer que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, prenons une suite (f_n) d'éléments de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f_n}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ et que la limite est indépendante du choix initial de la suite "approchante".
   Ainsi, le prolongement est unique et donné par
   $$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}: & L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \mathcal{F}(f) := \lim_{n\to+\infty} \widehat{f_n}. \end{array}$$
   Ce prolongement est linéaire, isométrique (à coefficient multiplicatif près) et donc injectif.
3. Montrer que $\mathcal{F}\left(L^2(\mathbb{R})\right)$ est fermé et dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Conclure.

5 Si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$...

...alors presque tout reste valable avec des changements "évidents". En particulier, les réels x et ξ deviennent des vecteurs, le produit de réels $x\xi$ devient le produit scalaire $\langle x, \xi \rangle$, dans les théorèmes les constantes 2π deviennent $(2\pi)^N$... Quant aux gaussiennes, vérifier que

$$\mathcal{F}\left(\exp\left(-\sum_{i=1}^{N} a_i x_i^2\right)\right) = \left(\Pi_{i=1}^{N}\sqrt{\frac{\pi}{a_i}}\right)\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4a_i}\xi_i^2\right).$$