Université de Rouen Normandie **Année 2022-2023**

Contrôle continu EDO M1

Exercice 1
Résoudre les trois problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} x' = 2tx + \frac{e^{t^2}}{1+t^2} \\ x(0) = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'' + x' - 2x = \cos t - 3\sin t \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = e^{-x}e^t \\ x(0) = \ln 2. \end{cases}$

Exercice 2
Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour les solutions $(x(t), y(t))$ du système

$$\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -2x - 3y \end{cases}$$

lorsque $t \to +\infty$?

Exercice 3
On considère le problème

$$\begin{cases} x' = t - x^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution maximale. On note $]T_{min}, T_{max}[$ son intervalle de définition, avec $-\infty \leq T_{min} < 0 < T_{max} \leq +\infty$.
2. On suppose $T_{min} = -\infty$. Montrer que, pour $t \leq -1$,

$$\frac{x'(t)}{1 + x^2(t)} \leq -1.$$

   Intégrer cette inégalité entre $T \leq -1$ et -1, puis prendre la limite $T \to -\infty$. Qu'en déduire ?
3. On suppose $T_{max} < +\infty$.
   a) Que vaut $x'(0)$?
   b) Supposons que x' ne s'annule pas sur $[0, T_{max}[$. Montrer que x est décroissante et minorée sur $[0, T_{max}[$ et en déduire une absurdité. Ainsi il existe $t_0 \in]0, T_{max}[$ tel que $x'(t_0) = 0$.
   c) En dérivant l'équation différentielle, montrer que tout point critique est un minimum local strict.
   d) En déduire que

$$\forall t \in]t_0, T_{max}[, x'(t) > 0.$$

   Montrer que x est majorée au voisinage de T_{max} et en déduire une absurdité.

Exercice 4

On considère deux populations mesurées par $x(t)$ et $y(t)$. Le modèle est le problème de Cauchy non linéaire

$$\begin{cases} x' = x(1 - x + \alpha y) \\ y' = y(1 - y + \beta x) \\ x(0) = x_0 > 0 \\ y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

où α et β sont deux constantes positives.

1. En quelques mots, expliquer les phénomènes mis en jeu dans ce système.
2. Dans cette question, on suppose $\alpha = 0$ et $\beta > 0$. Quel est le devenir, en temps grand, de la population $x(t)$ (justifier brièvement) ? de la population $y(t)$ (pas de justification demandée) ?
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que la solution maximale (définie sur un intervalle noté J) reste dans le quadrant nord-est, c'est à dire
$$x(t) > 0 \quad \text{et} \quad y(t) > 0 \quad \text{pour tout } t \in J.$$
4. A partir de maintenant on choisit $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $x_0 = y_0 = 1$, et on s'intéresse donc à
$$\begin{cases} x' = x(1 - x + 2y) \\ y' = y(1 - y + x) \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$
et on note $J =]T_{min}, T_{max}[$ avec $-\infty \leq T_{min} < 0 < T_{max} \leq +\infty$.
a) Dans le plan de phase, tracer les isoclines et la direction des trajectoires. Quels sont les équilibres ? Etudier leur stabilité. Faire un "pronostic" sur le devenir des populations.
b) On suit la trajectoire de la solution maximale. En raisonnant par l'absurde (le plan de phase peut aider !) montrer que
$$\forall t \in [0, T_{max}[, \ \frac{x(t) - 1}{2} < y(t) < 1 + x(t).$$
En déduire que
$$\lim_{t \to T_{max}} x(t) = \lim_{t \to T_{max}} y(t) = +\infty.$$
c) On admet qu'on peut trouver $\varepsilon > 0$ assez petit tel que
$$\forall t \in [0, T_{max}[, \ y(t) \leq (1 - \varepsilon)(1 + x(t)).$$
En déduire que
$$\forall t \in [0, T_{max}[, \ y'(t) \geq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} y^2(t).$$
Qu'en déduire pour T_{max} ?