Université de Rouen Normandie **Année 2023-2024**

Contrôle continu EDO M1

Exercice 1

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ donné, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = e^x - 1 \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

On note $(J =]T_{min}, T_{max}[, x)$ sa solution maximale, avec $-\infty \leq T_{min} < 0 < T_{max} \leq +\infty$.

1. Quid si $x_0 = 0$?
2. On suppose ici $x_0 > 0$.
   a) Montrer que x est croissante sur J.
   b) En déduire que
   $$\forall t \in [0, T_{max}[,\ x'(t)e^{-x(t)} \geq 1 - e^{-x_0}.$$
   c) Montrer que $T_{max} < +\infty$.
3. On suppose ici $x_0 < 0$.
   a) Montrer que x est décroissante sur J.
   b) En déduire que
   $$\forall t \in [0, T_{max}[,\ x_0 - t \leq x(t) \leq x_0.$$
   c) Montrer que $T_{max} = +\infty$, et aussi que $T_{min} = -\infty$.
4. Tracer l'allure des solutions, l'une avec $x_0 > 0$, l'autre avec $x_0 < 0$.

Exercice 2

On considère

$$\begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = -x - y^3. \end{cases}$$

1. Dans le plan de phase, tracer les isoclines et la direction des trajectoires.
2. Montrer que $(0, 0)$ est l'unique équilibre. Etudier la stabilité du système linéarisé en $(0, 0)$.
3. A l'aide de
   $$L : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$
   montrer que l'équilibre $(0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

Exercice 3

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{1}{x} \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

1. A l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer qu'il existe une unique solution maximale, encore notée x (à valeurs dans $]0, +\infty[$). On note $]T_{min}, T_{max}[$ son intervalle de définition, avec $-\infty \leq T_{min} < 0 < T_{max} \leq +\infty$.
2. En admettant que $T_{min} = -T_{max}$, montrer que x est paire.
3. Dresser le tableau de variations de x sur $[0, T_{max}[$.
4. Trouver une fonction $\varphi :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

   $$\forall t \in]-T_{max}, T_{max}[, \ \varphi(x(t), x'(t)) = \varphi(1, 0) = 0.$$

   <u>Indication</u> : multiplier l'équation par x' puis...
5. On suppose $T_{max} < +\infty$.
   a) Montrer que x et x' doivent exploser en même temps quand $t \nearrow T_{max}$.
   b) En déduire une absurdité.