Exo 1

$$\begin{cases} x' = 2tx + \dfrac{e^{t^2}}{1+t^2} \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

1. Sol. de (H) : $t \longmapsto Ce^{t^2}$ où $C \in \mathbb{R}$

2. Var. cste : $C'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \Rightarrow t \longmapsto (\text{Arctan}\, t)e^{t^2}$ est une sol. part. de (E)

3. les sol sont $t \longmapsto (C + \arctan t)e^{t^2}$

4. $x(0) = 2 \Rightarrow C = 2$ $\boxed{\text{La sol est } t \longmapsto (2 + \arctan t)e^{t^2}}$

$$\begin{cases} x'' + x' - 2x = \cos t - 3\sin t \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

1. Sol de (H) : $t \longmapsto \lambda e^{t} + \mu e^{-2t}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

2. $z(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$

$z'(t) = -\alpha \sin t + \beta \cos t$

$z''(t) = -\alpha \cos t - \beta \sin t$

$$\begin{aligned} z''(t) + z'(t) - 2z(t) &= -\alpha \cos t - \beta \sin t - \alpha \sin t + \beta \cos t - 2\alpha \cos t - 2\beta \sin t \\ &= (-\alpha + \beta - 2\alpha)\cos t + (-\beta - \alpha - 2\beta)\sin t \\ &= (-3\alpha + \beta)\cos t + (-\alpha - 3\beta)\sin t \end{aligned}$$

On veut $\begin{cases} -3\alpha + \beta = 1 \\ -\alpha - 3\beta = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{matrix}$

3. les sol sont $t \longmapsto \sin t + \lambda e^{t} + \mu e^{-2t}$

4. $x(0) = 2 \Rightarrow$; $x'(0) = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - 2\mu = -1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 1$

$x'(t) = \cos t + \lambda e^{t} - 2\mu e^{-2t}$

$\boxed{\text{La sol est } t \mapsto \sin t + e^{t} + e^{-2t}}$

$$\begin{cases} x' = e^{-x} e^{t} \\ x(0) = \ln 2 \end{cases}$$

$x' e^{x} = e^{t} \Rightarrow e^{x(t)} - e^{x(0)} = e^{t} - e^{0}$

$\Rightarrow e^{x(t)} - 2 = e^{t} - 1$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = \ln(1 + e^{t})}$ sol globale !

Ex 2

$\boxed{\text{vp : } -1 \text{ et } -2}$ donc $\boxed{(x(t), y(t)) \xrightarrow{t \to +\infty} (0,0)}$ (cf Cor 3.4.2 du poly !)

Ex 3

1/ $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \longmapsto t - x^2$ est C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ donc CL s'applique !!

$\boxed{\exists !\ \text{sol. max. } (]T_{min}, T_{max}[, x)}$ au pb de Cauchy

2/ Supposons $T_{min} = -\infty$

pour $t \leq -1$ $\quad x'(t) = t - x^2(t) \leq -1 - x^2(t)$

donc $\boxed{\dfrac{x'(t)}{1 + x^2(t)} \leq -1}$

Donc pour $T \leq -1$

$$\int_T^{-1} \frac{x'(t)}{1 + x^2(t)}\, dt \leq \int_T^{-1} -1\, dt$$

donc

$$\underbrace{\operatorname{Arctan} x(-1) - \operatorname{Arctan} x(T)}_{\text{minorée par } \operatorname{Arctan} x(-1) - \frac{\pi}{2}} \leq 1 + T \xrightarrow{T \to -\infty} -\infty$$

$\boxed{\text{Absurde}}$ Donc $\boxed{T_{min} > -\infty}$

3/ Supposons $T_{max} < +\infty$

a/ $x'(0) = 0 - x^2(0) = \boxed{-1}$

b/ Supp que x' ne s'annule pas sur $[0, T_{max}[$ $\overset{x'(0) = -1}{\Longrightarrow}$ $\boxed{x' < 0 \text{ sur } [0, T_{max}[}$

par suite $t < x^2(t)$ donc $\boxed{x > 0 \text{ sur } [0, T_{max}[}$

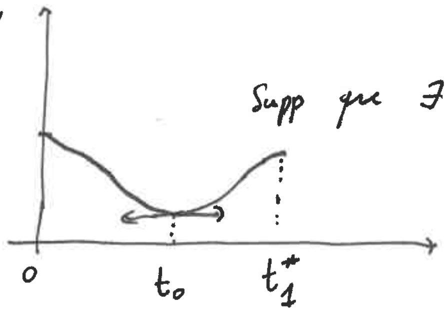
x est ↓ minorée sur $[0, T_{max}[$ $\Rightarrow$ pas d'explosion en $t = T_{max}$ $\boxed{\text{Absurde}}$

Ainsi $\boxed{\exists\ t_0 \in\ ]0, T_{max}[,\ x'(t_0) = 0}$

c/ $x'(t) = t - x^2(t) \quad \Rightarrow \quad x''(t) = 1 - 2x(t)x'(t)$

Si $x'(t^*) = 0$ (ie pt critique) Alors $x''(t^*) = 1 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{min. local strict}}$

d/



Supp que $\exists\, t_1 \in]t_0, T_{max}[,\ x'(t_1) = 0$

Si t_1^* est le 1er pt après t_0 où x' s'annule

(ce pt existe bien car $x''(t_0) = 1$!!......)

Alors on doit avoir $x''(t_1^*) \leq 0$ (cf dessin...)

En contradiction avec c/

Ainsi $\boxed{\forall t \in]t_0, T_{max}[\quad x'(t) > 0}$

$x'(t) > 0 \Rightarrow x^2(t) < t \Rightarrow \boxed{|x(t)| < \sqrt{t} < \sqrt{T_{max}}}$

x est $\nearrow$ majorée sur $[0, T_{max}[\Rightarrow$ pas d'explosion en $t = T_{max}$

$\boxed{\text{Absurde}}$

Ainsi $\boxed{T_{max} = +\infty}$

$\boxed{\text{Exo 4}}$

1) $\boxed{\text{Croissance logistique, Mutualisme}}$

2/ Si $\alpha = 0$ $\begin{cases} x' = x(1-x) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$ on sait que $\boxed{x(t) \xrightarrow{t \to +\infty} 1}$

puis formellement, en tps grand : $y' \approx y(1 + \beta - y)$ On sait que $\boxed{y(t) \xrightarrow{t \to +\infty} 1 + \beta}$

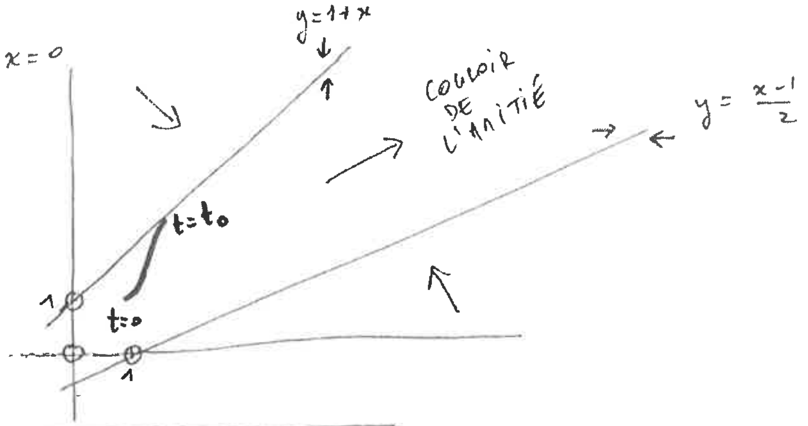
3/ Constatons que $\begin{cases} x \equiv 0 \\ \text{et} \\ y' = y(1-y) \end{cases}$ est sol. globale du système.

Ainsi si la sol. maximale vérifie $x(t_0) = 0$ pour un $t_0 > 0$ alors, par Cauchy Lipschitz, on doit avoir $x \equiv 0$ ce qui contredit $x(0) = x_0 > 0$.

Par suite $\boxed{\forall t \in J \quad x(t) > 0 \quad \text{et (idem)} \quad y(t) > 0}$

4/ a/ $x' = 0 \iff x = 0$ ou $y = \frac{x-1}{2}$ Dans le quadrant NORD-EST : $x' > 0 \iff y > \frac{x-1}{2}$

$y' = 0 \iff y = 0$ ou $y = 1 + x$ $\quad y' > 0 \iff y < 1 + x$



$$\boxed{\text{Equilibre : } (0,0)\ ,\ (1,0),\ (0,1)}$$

Au voisinage de $(0,0)$: $\begin{cases} x' \approx x \\ y' \approx y \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ vp 1 et 1 $\quad \boxed{\text{INSTABLE}}$

Au voisinage de $(1,0)$:

$\bar{x} = x - 1$

$\bar{y} = y$

$$\begin{cases} \bar{x}' = x' = x(1-x+2y) = (1+\bar{x})(-\bar{x}+2\bar{y}) \approx -\bar{x}+2\bar{y} \\ \bar{y}' = y' = y(1-y+x) = \bar{y}(2+\bar{x}-\bar{y}) \approx 2\bar{y} \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ vp -1 et $\underset{>0}{2}$ $\quad \boxed{\text{INSTABLE}}$

Pour $(0,1)$ on trouve (idem) $\boxed{\text{INSTABLE}}$

$$\boxed{\text{Pronostic : } x(t) \longrightarrow +\infty,\quad y(t) \longrightarrow +\infty}$$

b) Supposons que (par exemple) : $\exists\, t \in\,]0, T_{max}[\,,\ y(t) \geq 1 + x(t)$

Alors $\exists\, t_0 \in\,]0, T_{max}[\ \begin{cases} \forall t \in [0, t_0[\,,\ y(t) < 1 + x(t) \\ \text{et} \\ y(t_0) = 1 + x(t_0) \end{cases}$ $\quad t_0 =$ "premier tps de contact" (cf dessin trajectoire bleue)

Par suite $y'(t_0) = 0$ et donc la trajectoire en ce point est "plate"

ce qui contredit la minimalité de t_0 ...

Ainsi $\boxed{\forall t \in [0, T_{max}[\,,\ \dfrac{x(t)-1}{2} < y(t) < 1 + x(t)}$

Ainsi la trajectoire reste coincée dans le "couloir de l'amitié".

En particulier $x(t) \nearrow$

$y(t) \nearrow$

Donc soit $(x(t), y(t)) \longrightarrow$ point équilibre. Impossible

soit $\boxed{\begin{array}{l} x(t) \longrightarrow +\infty \\ \text{et } y(t) \longrightarrow +\infty \end{array}}$

c) $y \leq (1-\varepsilon)(1+x)$ Donc $\frac{y}{1-\varepsilon} - 1 \leq x$

Donc $y' = y(1-y+x) \geqslant y\left(\frac{y}{1-\varepsilon} - y\right) = y^2 \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$

$\boxed{\forall t \in [0, T_{max}[, \quad y'(t) \geqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} y^2(t)}$

Par suite $\boxed{T_{max} < +\infty}$

$\boxed{\text{Explosion en temps fini}}$