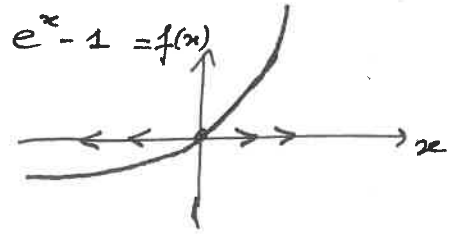
$\boxed{\text{Exo 1}}$

$$\begin{cases} x' = e^{x} - 1 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$



1) 0 est le seul équilibre. $x_0 = 0 \Rightarrow \boxed{x \equiv 0}$

2) Supp. $x_0 > 0$

a) 0 équilibre donc $\forall t \in J$, $x(t) > 0$ et donc $\underbrace{e^{x(t)} - 1}_{= x'(t)} > 0$

$$\boxed{x \nearrow \text{ sur } J}$$

b) $x'(t) e^{-x(t)} = 1 - e^{-x(t)}$

$x \nearrow$ sur J donc pour $t \geq 0$
$$x(t) \geq x_0$$
$$-x(t) \leq -x_0$$
$$e^{-x(t)} \leq e^{-x_0}$$
$$1 - e^{-x(t)} \geq 1 - e^{-x_0}$$

et donc $\boxed{x'(t) e^{-x(t)} \geq 1 - e^{-x_0} \text{ pour } t \in [0, T_{max}[}$

c) Pour $t \in [0, T_{max}[$

$$\int_0^t x'(s) e^{-x(s)} ds \geq \int_0^t (1 - e^{-x_0}) ds = t(1 - e^{-x_0})$$

$$\int_0^t x'(s) e^{-x(s)} ds = \left[-e^{-x(s)}\right]_0^t = -e^{-x(t)} + e^{-x_0}$$

Donc $t(1 - e^{-x_0}) \leq e^{-x_0} - e^{-x(t)} \leq e^{-x_0}$

donc $t \leq \dfrac{e^{-x_0}}{1 - e^{-x_0}}$ donc $\boxed{T_{max} \leq \dfrac{e^{-x_0}}{1 - e^{-x_0}} < +\infty}$

3) Supp $x_0 < 0$

a) 0 équilibre donc $\forall t \in J$, $x(t) < 0$ et donc $\underbrace{e^{x(t)} - 1}_{= x'(t)} < 0$

$$\boxed{x \searrow \text{ sur } J}$$

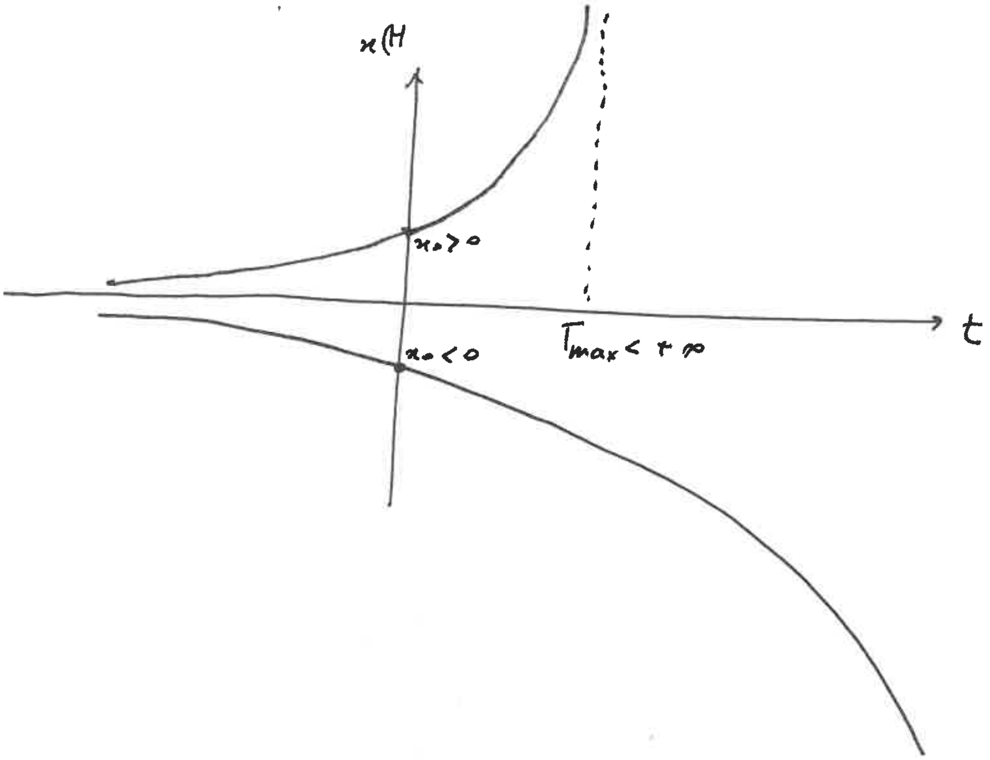
b) Pour $t \geq 0$: $-1 \leq x'(t) = e^{x(t)} - 1 \leq 0$

donc, en intégrant,
$$-t \leq x(t) - x_0 \leq 0 \quad \text{et donc} \quad \boxed{x_0 - t \leq x(t) \leq x_0} \; (*)$$

c) $(*)$ interdit l'explosion en temps fini donc $\boxed{T_{max} = +\infty}$

Pour $t \leq 0$, $x_0 \leq x(t) \leq 0$ donc $\boxed{T_{min} = -\infty}$

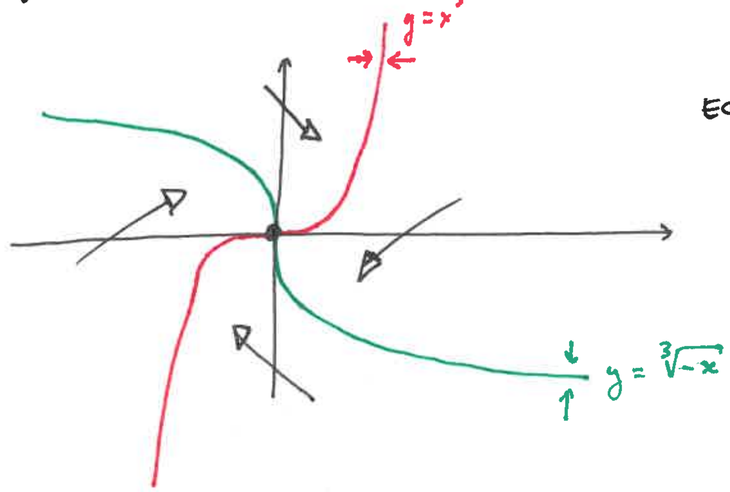
4/



Exo 2

1) $x' > 0 \iff y > x^3$

$y' > 0 \iff y^3 < -x \iff y < \sqrt[3]{-x}$



EQUILIBRE : $(0,0)$

2) $\begin{cases} y = x^3 \\ y^3 = -x \end{cases} \Rightarrow (x^3)^3 = -x \iff x^9 + x = 0$ et $y = 0$

$\iff x(\underbrace{x^8+1}_{>0}) = 0 \iff x = 0$

Réciproque claire $\boxed{(0,0) \text{ seul équilibre}}$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y - x^3 \\ -x - y^3 \end{pmatrix}$

$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ -1 & -3y^2 \end{pmatrix}$

$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dont les vp sont $\pm i$.

$\boxed{\begin{array}{l} (0,0) \\ \text{CENTRE} \\ \text{stable (mais} \\ \text{pas as. stable)} \\ \text{pour le linéarisé} \end{array}}$

3) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto L(x,y) = x^2 + y^2$

- $L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \; L(x,y) > 0$
- $\forall t, \; \frac{d}{dt}\left(L(x(t), y(t))\right) = \frac{d}{dt}\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)$

$= 2x'(t)x(t) + 2y'(t)y(t)$

$= 2(y - x^3)x + 2(-x - y^3)y$

$= 2xy - 2x^4 - 2xy - 2y^4$

$= -2(x^4 + y^4) < 0$ dès que $(x_0, y_0) \neq (0,0)$

L fct de Lyapounov stricte

De plus $L(x,y) \xrightarrow[\|(x,y)\| \to +\infty]{} +\infty$

Donc $\boxed{(0,0) \text{ Globalement asymptotiquement stable}}$

$\boxed{\text{Exo 3}}$

1/ Le pb se réécrit

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1}{x} \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X' = f(X) \\ X(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases} \quad \text{où } f :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ 1/x \end{pmatrix}$$

Donc CL s'applique

$\boxed{\exists ! \text{ sol. max } (J, x) \text{ avec } x : J \longrightarrow]0,+\infty[}$ $\quad J =]T_{min}, T_{max}[$

$-\infty \leq T_{min} < 0 < T_{max} \leq +\infty$

2/ Posons $\bar{x}(t) = x(-t)$ $\rightsquigarrow$ $\bar{x}(0) = x(0) = 1$

$\bar{x}'(t) = -x'(-t)$ $\rightsquigarrow$ $\bar{x}'(0) = -x'(0) = 0$

$\bar{x}''(t) = x''(-t) = \dfrac{1}{x(-t)} = \dfrac{1}{\bar{x}(t)}$

par CL $\bar{x} \equiv x$

ie

$\boxed{x \text{ paire sur }]-T_{max}, T_{max}[}$

3/ $\forall t \in J$, $x''(t) = \dfrac{1}{x(t)} > 0$ donc

t	$-T_{max}$		0		T_{max}
signe $x''(t)$			$+$		
Var. de x'		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
Signe $x'(t)$		$-$	0	$+$	
Var de x		$\searrow$	1	$\nearrow$	

4/ $\varphi :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto \frac{1}{2} y^2 - \ln x$

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi(x(t), x'(t))\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} x'(t)^2 - \ln x(t)\right)$$

$$= x'(t)\, x''(t) - \frac{x'(t)}{x(t)} = x'(t)\left(x''(t) - \frac{1}{x(t)}\right) = 0$$

donc $\boxed{\varphi(x(t), x'(t)) = \text{cte} = \varphi(x(0), x'(0)) = \varphi(1, 0) = 0}$

5/ Supp $T_{max} < +\infty$

a/ On a $\frac{1}{2} x'(t)^2 = \ln x(t)$

Si $x'(t)^2$ n'explose pas Alors $\ln x(t)$ (et donc $x(t)$) non plus. Absurde

donc $x'(t)^2$ explose et $\ln x(t)$ aussi. Par 3) $\boxed{\begin{matrix} x'(t) \longrightarrow +\infty \\ x(t) \longrightarrow +\infty \end{matrix} \quad \text{qd } t \xrightarrow{<} T_{max}}$

b/ Pour $t \geq 0$ en intégrant $x'' = \frac{1}{x}$ on a $x'(t) - \cancel{x'(0)} = \int_0^t \frac{ds}{x(s)} \leq t$ $\boxed{\text{Absurde}}$ avec a