

Calcul différentiel
&
équations différentielles

2021-2022

Université de Rouen Normandie, LMRS

Matthieu Alfaro.

AVERTISSEMENT :

Ce poly est un document en construction, qui contient sûrement quelques coquilles voire erreurs et ne demande qu'à s'améliorer.

Ce poly est incomplet et aride à la lecture seule. Il prend son sens une fois complété par les explications, les reformulations, les dessins, les lemmes, les preuves, les exemples donnés en cours, et les exercices traités en TD.

Bref, ce poly n'est qu'un support...

Ce poly est librement inspiré de plusieurs cours préexistants, cf notamment [3], [4], [6] qu'on peut aller voir pour rentrer dans certains détails passés ici sous silence.

Les figures du Chapitre 1 sont fournies par B. Charlier.

Le chapitre 7 sur les sous-variétés est un extrait du cours de S. Raulot [7], merci à lui!

Table des matières

I	CALCUL DIFFERENTIEL	1
1	Fonctions de plusieurs variables	2
1.1	Continuité	2
1.2	Continuité et linéarité	5
1.3	Dérivées directionnelles et dérivées partielles	6
1.4	Exercices	8
2	Différentiabilité	11
2.1	Définition et premiers exemples	11
2.2	Opérations sur les différentielles	12
2.3	Inégalité des accroissements finis et applications	14
2.4	Exercices	15
3	Différentielles d'ordre supérieur	19
3.1	Différentielle seconde	19
3.2	Dérivées partielles d'ordre 2, Schwartz, Matrice hessienne	20
3.3	Taylor-Young à l'ordre 2 et extrema	21
3.4	Formule de Taylor intégral à l'ordre 2	22
3.5	Différentielles d'ordre supérieur	23
3.6	Exercices	23
4	Les théorèmes pour “inverser”	26
4.1	Le théorème des fonctions implicites	26
4.1.1	Un cas simple mais éclairant ($f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)	26
4.1.2	Le cas $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$	28
4.1.3	Le cas “général” $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$	29
4.2	Les théorèmes d'inversion	30
4.3	Exercices	31
5	Extrema liés	36
5.1	Un exemple/exercice naïf	36
5.2	Une contrainte, multiplicateur de Lagrange	36
5.3	Plusieurs contraintes, multiplicateurs de Lagrange	37
5.4	Exercices	38
6	Quid en dimension infinie ?...	39
6.1	Différentiabilité	39
6.2	Fonctions implicites en dimension infinie, applications	40
6.3	Extrema liés en dimension infinie, une application	41

7	Sous-variétés	42
7.1	Préliminaires : rang, immersion et submersion	42
7.2	Sous-variétés : définitions équivalentes	42
7.2.1	Par équation locale	42
7.2.2	Par redressement local	43
7.2.3	Par graphe local	44
7.2.4	Par paramétrisation locale	44
7.3	Espace tangent et fibré tangent	44
7.4	Applications différentiables entre sous-variétés	45
7.5	Exercices	45
II	EQUATIONS DIFFERENTIELLES	47
8	Théorème de Cauchy-Lipschitz	48
8.1	Des équations différentielles pour modéliser	48
8.2	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	51
8.3	Premières conséquences	53
8.4	Explosion en temps fini	53
8.5	Exercices	55
9	Equations différentielles linéaires	58
9.1	Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire	58
9.2	L'espace affine des solutions	59
9.3	Equations linéaires scalaires ($n = 1$)	59
9.3.1	Ordre 1	59
9.3.2	Ordre 2	60
9.4	Systèmes linéaires ($n \geq 2$) à coefficients constants	63
9.4.1	Equation homogène (H) : $X' = \mathcal{A}X$	63
9.4.2	Equation (E) : $X' = \mathcal{A}X + B(t)$	64
9.5	Exercices	65
10	Des outils pour les EDO non linéaires	69
10.1	Equations scalaires (taille 1)	69
10.1.1	Quelques cas "calculables"	69
10.1.2	Equations scalaires autonomes : études qualitatives	70
10.2	Systèmes différentiels autonomes de taille 2	71
10.2.1	Stabilité linéaire	72
10.2.2	Le cas non linéaire par des exemples	72
10.3	Fonction de Lyapounov	76
10.4	Exercices	77
III	ANNEXES	83
A	Rappels, compléments, choses utiles	84
A.1	Topologie	84
A.2	Théorème du point fixe de Banach-Picard	84
A.3	Analyse fonctionnelle	84

Première partie

CALCUL DIFFERENTIEL

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

Dans ce chapitre on va considérer des fonctions définies sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R}^p :

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Pour “représenter” une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} (à valeurs réelles), on renvoie aux Figures 1.1 et 1.2 . Pour représenter une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 (à valeurs vectorielles ; on parle de champ de vecteurs), on renvoie à la Figure 1.3.

On rappelle qu’en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ainsi, sur l’ensemble de départ \mathbb{R}^n , on peut choisir la norme définie par

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|,$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ s’écrit $x = (x_1, \dots, x_n)$, ou la norme définie par

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2},$$

ou toute autre norme, et *idem* sur l’espace d’arrivée \mathbb{R}^p .

Notons qu’à toute fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, on peut associer ses p fonctions composantes $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $1 \leq i \leq p$) de façon à ce que

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)),$$

pour tout $x \in U$. Remarquons qu’une fonction composante est à valeurs réelles.

Pour une fonction définie sur un ouvert U de \mathbb{R} , vous connaissez la notion de dérivabilité (éventuelle) en un point $a \in U$. En revanche, pour une fonction définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$, vous ne connaissez pas pour l’instant de notion de dérivabilité convenable. Afin de donner un sens à cette notion dans le Chapitre 2, nous allons d’abord dans ce chapitre apprendre à “dériver dans une direction” les fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Avant cela, commençons par quelques courts rappels sur la notion de continuité.

1.1 Continuité

Définition 1.1.1 (Continuité). *On considère $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et un point $a \in U$. On dit que f est continue en a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in U, \|x - a\| < \alpha \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur U si elle est continue en tout point $a \in U$.

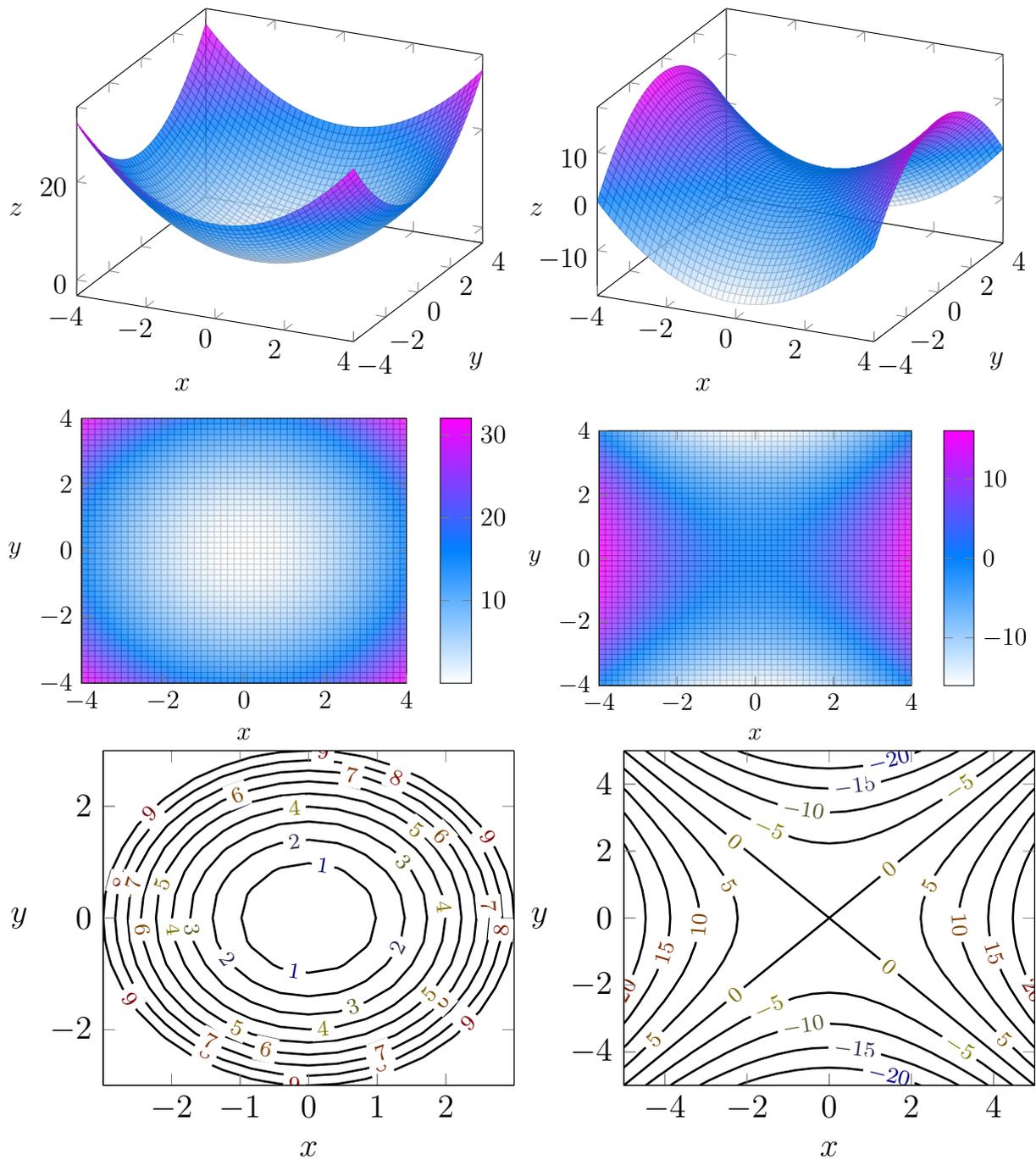


FIGURE 1.1 – A gauche : $f(x, y) = x^2 + y^2$ (fonction radiale). A droite : $f(x, y) = x^2 - y^2$. En haut : le graphe (paraboloïde/selle de cheval). Au milieu : vue de dessus. En bas : les lignes de niveau.

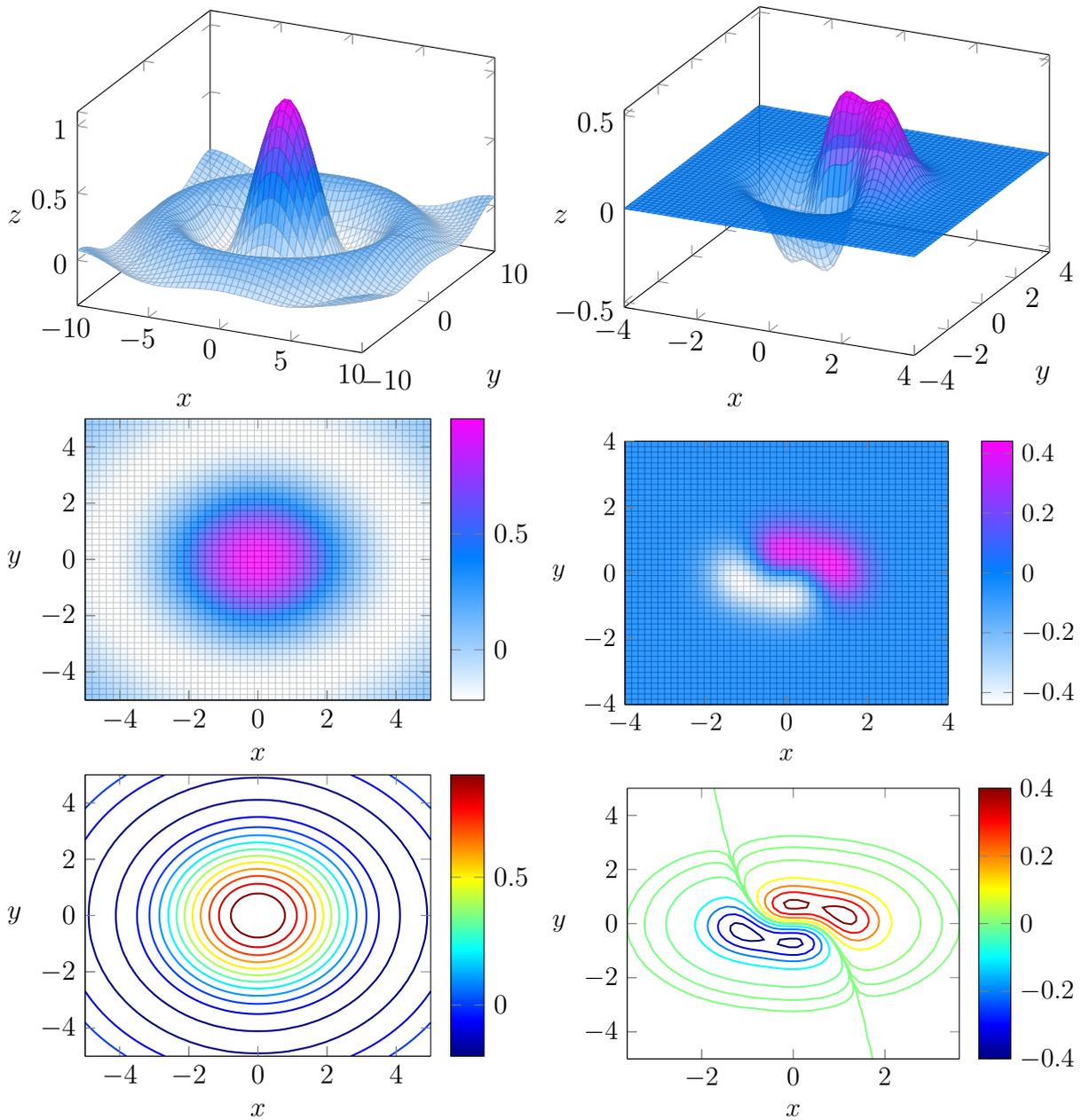


FIGURE 1.2 – A gauche : $f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (fonction radiale). A droite : $f(x, y) = (x^3 + y)e^{-x^2-y^2}$. En haut : le graphe. Au milieu : vue de dessus. En bas : les lignes de niveau.

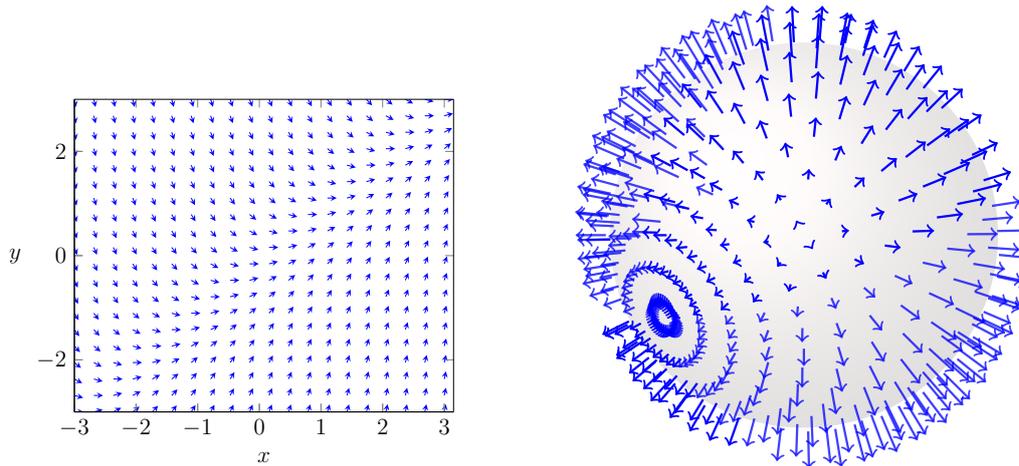


FIGURE 1.3 – A gauche le champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = \frac{0.15}{\sqrt{1+(x-y)^2}}(1, x-y)$. A droite un champ de vecteurs $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini sur la sphère $S = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ de \mathbb{R}^3 .

Vous savez qu'en ajoutant, multipliant, divisant ou composant "proprement" des fonctions continues on obtient encore une fonction continue. Ainsi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{e^{\sin(xy)}}{x^2+y^2+1}$ est clairement continue sur \mathbb{R}^2 . Cependant il faut parfois revenir à la définition pour prouver la continuité ou la non continuité en certains points.

Exemple 1.1.2. *Etudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

1.2 Continuité et linéarité

On rappelle que si E et F sont deux espaces vectoriels normés on note $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F , et $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F .

Proposition 1.2.1. *Soit $f \in L(E, F)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est continue sur E .
- (ii) f est continue en 0_E .
- (iii) $\exists M \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.
- (iv) f est bornée sur la boule unité fermée.
- (v) f est bornée sur la sphère unité.
- (vi) f est lipschitzienne sur E , cad $\exists k \geq 0, \forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$.

On peut faire de $\mathcal{L}(E, F)$ un espace vectoriel normé, grâce notamment à la norme triple : pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ on pose

$$\| \| f \| \|_{\mathcal{L}(E, F)} := \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F.$$

Notez qu'on peut alors montrer facilement que

$$\| \| f \| \|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{x \in E, x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E},$$

mais aussi que

$$\| \| f \| \|_{\mathcal{L}(E,F)} = \inf \{ M > 0, \forall x \in E, \| f(x) \|_F \leq M \| x \|_E \},$$

cad que $\| \| f \| \|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est la meilleure des constantes M qui assure Proposition 1.2.1 (iii).

Notons alors que, par définition,

$$\| f(x) \|_F \leq \| \| f \| \| \times \| x \|_E \quad \text{pour tout } x \in E.$$

La bonne nouvelle c'est que dès que E est de dimension finie alors toute application linéaire de E dans F est continue, c'est à dire que

$$L(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \quad \text{si } E \text{ est de dimension finie.}$$

Ainsi, toute application linéaire de \mathbb{R}^n dans F , en particulier dans \mathbb{R}^p , est ("gratuitement") continue. Plus généralement toute application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^p est continue, et toute application multilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^p est continue.

1.3 Dérivées directionnelles et dérivées partielles

Soit une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Soit $a \in I$. On rappelle que f est dérivable en a signifie, par définition, que le taux d'accroissement

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ admet une limite finie (cad un vecteur de } \mathbb{R}^p) \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Si ceci est vérifié alors on note $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ la dérivée de f en a .

Pour une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et un $a \in U$ donné, si on veut construire un taux d'accroissement, il faut choisir un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ qui donne la direction dans laquelle on procède au taux d'accroissement. On définit ainsi la notion de dérivée directionnelle.

Définition 1.3.1 (Dérivée directionnelle). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ (qu'on peut supposer de norme 1). On dit que f admet une dérivée en a suivant le vecteur v si*

$$\frac{f(a+hv) - f(a)}{h} \text{ admet une limite finie (cad un vecteur de } \mathbb{R}^p) \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Si ceci est vérifié alors on note $D_v f(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$ la dérivée de f en a suivant le vecteur v .

Dans la suite, on note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

Définition 1.3.2 (Dérivée partielle). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$. Si f admet une dérivée en a suivant e_j , on dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à x_j et on note*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j} f(a).$$

Remarque 1.3.3. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$. Pour $1 \leq j \leq n$ on définit la j -ième application partielle de f en a comme l'application g_j définie, sur un voisinage de a_j et à valeurs dans \mathbb{R}^p , par*

$$g_j(x) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n),$$

cf Figure 1.4. Alors f admet une dérivée partielle en a par rapport à x_j si et seulement si g_j est dérivable en a_j et alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = g'_j(a_j).$$

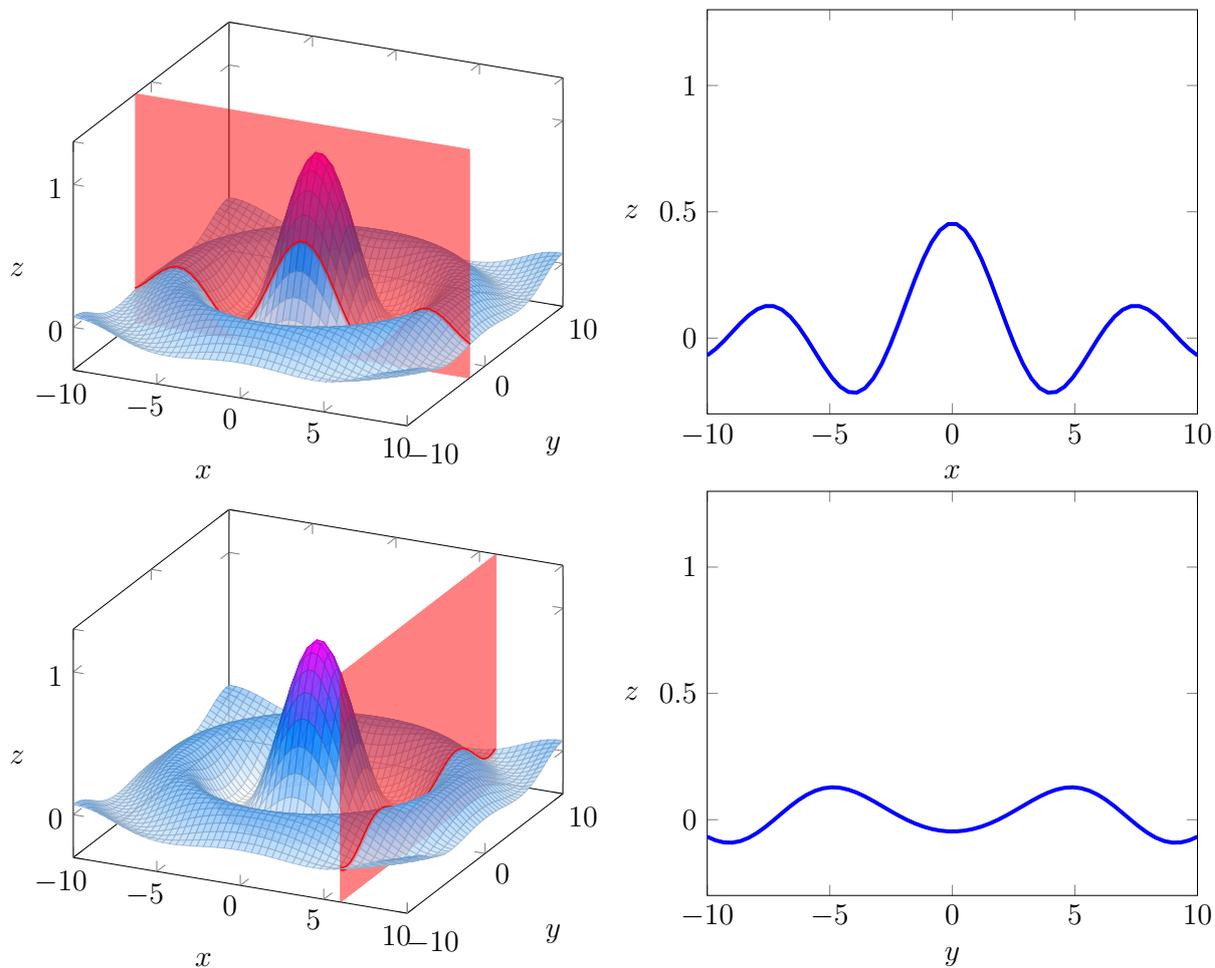


FIGURE 1.4 – En haut à gauche : graphe de $f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$. En haut à droite la première application partielle (de la variable x) définie par $g_1(x) = f(x, -2)$. En bas à gauche : graphe de $f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$. En bas à droite la deuxième application partielle (de la variable y) définie par $g_2(y) = f(6, y)$.

Ainsi “pour dériver partiellement par rapport à une variable, on fait comme si toutes les autres variables étaient des constantes”...

Définition 1.3.4 (Matrice jacobienne, Jacobien). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$. Si f admet une dérivée partielle en a par rapport à tous les x_j ($1 \leq j \leq n$) alors il en va de même pour toutes les applications composantes f_i ($1 \leq i \leq p$). On appelle alors matrice jacobienne de f en a la matrice notée $Df(a)$ de taille (p, n) définie par

$$Df(a) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Lorsque $p = n$ la matrice jacobienne de f en a (lorsqu'elle existe) est carrée et son déterminant s'appelle le jacobien de f en a . On le note $Jac_f(a)$ ou $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a)$:

$$Jac_f(a) = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) := \text{Det } Df(a).$$

Exemple 1.3.5. On donne $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 + ye^z, xy + y^2)$. Ecrire la matrice jacobienne en un point (x, y, z) .

Exemple 1.3.6. On donne $f :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Calculer le jacobien en un point (r, θ) .

Définition 1.3.7 (Gradient). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admettant une dérivée partielle en $a \in U$ par rapport à tous les x_j ($1 \leq j \leq n$). Alors la matrice jacobienne de f en a est de taille $(1, n)$, cad un vecteur ligne. La transposée de ce vecteur ligne est un vecteur colonne appelé gradient de f en a et noté $\nabla f(a)$, ou $\overrightarrow{\text{Grad}}_a f$. On a donc

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.3.8. On donne $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^3 z$. Ecrire le gradient de f en un point (x, y, z) .

1.4 Exercices

Exercice 1.4.1. Représenter dans \mathbb{R}^2 les ensembles de définition des fonctions définies par

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \ln(2x + y - 2), \\ f_2(x, y) &= \sqrt{1 - xy} \\ f_3(x, y) &= \frac{\ln(y - x)}{x}, \\ f_4(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Exercice 1.4.2. Représenter dans \mathbb{R}^2 les lignes de niveau k (c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x, y) = k$) des fonctions définies par

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 - y^2 && \text{avec } k = -1, k = 0, k = 1, \\ f_2(x, y) &= \frac{x^4 + y^4}{8 - x^2 y^2} && \text{avec } k = 2. \end{aligned}$$

Exercice 1.4.3. On se donne f, g et h définies sur \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} , définies par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2, \\ g(x, y) &= xy, \\ h(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Représenter dans \mathbb{R}^2 quelques lignes de niveau de ces fonctions.
2. Donner l'allure du graphe de f et g au voisinage de $(0, 0)$.
3. Donner l'allure du graphe de h au voisinage de $(0, 0)$.
4. La fonction h est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 1.4.4. Dans les cas suivants, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ admet-elle une limite en $(0, 0)$?

1. $f(x, y) = (x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.
2. $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
3. $f(x, y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$.
4. $f(x, y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x} \sin x, \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Exercice 1.4.5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

1. Montrer que $2|xy| \leq x^2 + y^2$ pour tous réels x et y .
2. Montrer que, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$|f(x, y)| \leq 4\|(x, y)\|_2,$$

où $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. En déduire que f admet une limite en $(0, 0)$.

Exercice 1.4.6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos y & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Dessiner son graphe.
2. Préciser les points où f est continue et ceux où f est discontinue.

Exercice 1.4.7. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. On peut écrire $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ où les $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont les p fonctions composantes. Soit $a \in U$. Montrer que f est continue en a si et seulement si toutes les f_i ($1 \leq i \leq p$) sont continues en a .

Exercice 1.4.8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on définit la première application partielle en y par $g_y : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on définit la deuxième application partielle en x par $g_x : y \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$. Montrer que

$$f \text{ continue sur } \mathbb{R}^2 \implies \text{pour tout } y, g_y \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x, g_x \text{ continue sur } \mathbb{R}.$$

A l'aide de la fonction g de l'exercice 1.1.2, montrer que la réciproque est fautive.

Exercice 1.4.9. Déterminer les matrices jacobiniennes, et le jacobien s'il existe, des applications suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x \cos(y - x)$.
2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $g(t) = (\cos t, \sin t, t)$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $h(x, y) = (xy, e^x \cos y)$.

Exercice 1.4.10. On donne $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|_2$. Calculer, lorsqu'il existe, $\nabla f(a)$ le gradient de f en $a \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 1.4.11. On donne $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On se donne une direction unitaire $e = (\cos \theta, \sin \theta)$. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la dérivée directionnelle $D_e f(0, 0)$ existe et la calculer. Montrer aussi que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Chapitre 2

Différentiabilité

Dans tout ce chapitre E , F et G désignent des \mathbb{R} espaces vectoriels normés de dimension finie, par exemple \mathbb{R}^n , ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n . On désignera par U un ouvert de E et U' un ouvert de F . On va considérer des fonctions f

$$f : U \subset E \rightarrow F,$$

et $g : U' \subset F \rightarrow G$.

2.1 Définition et premiers exemples

On se donne un point $a \in U$ et on veut étudier f au voisinage de ce a . On sait déjà ce que signifie “ f continue en a ” :

$$f \text{ continue en } a \iff f(a+h) = f(a) + o(1) \text{ quand } h \rightarrow 0_E.$$

On voudrait mieux contrôler le $o(1)$... On se souvient que, pour une fonction de la variable réelle $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow F$,

$$f \text{ dérivable en } a \iff \begin{array}{l} \text{il existe un vecteur de } F \text{ noté } f'(a) \text{ tel que} \\ f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h) \text{ quand } h \rightarrow 0_{\mathbb{R}}. \end{array}$$

Théorème-Definition 2.1.1 (Différentiabilité). *Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. Soit $a \in U$. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire continue de E dans F , notée df_a ou $df(a)$, telle que*

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{df_a}_{\in \mathcal{L}(E,F)}(h) + o(h) \text{ quand } h \rightarrow 0_E.$$

En cas d'existence une telle application linéaire continue df_a est unique. On dit alors que l'application linéaire df_a est tangente à f en a .

Exemple 2.1.2. *Si $E = \mathbb{R}$ alors on est face à une fonction de la variable réelle et il serait bon que la notion de dérivabilité en a coïncide avec celle de différentiabilité en a . C'est bien le cas : f est dérivable en a si et seulement si f est différentiable en a et, dans ce cas l'application linéaire $df_a : U \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ est définie par*

$$\forall h \in U, df_a(h) = hf'(a).$$

Dans la suite, l'application linéaire df_a sera également notée $f'(a)$.

Exemple 2.1.3. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est déjà une application linéaire alors elle est différentiable en tout $a \in E$ et $df_a = f$ (ou $f'(a) = f$).

Exemple 2.1.4. Si $B : E \times E \rightarrow F$ est une application bilinéaire alors B est différentiable en tout point $(x, y) \in E^2$ et $dB_{(x,y)} = B'(x, y) \in \mathcal{L}(E^2, F)$ est donnée par

$$\forall (h_1, h_2) \in E^2, dB_{(x,y)}(h_1, h_2) = B'(x, y)((h_1, h_2)) = B(x, h_2) + B(h_1, y).$$

Proposition 2.1.5 (Diff. implique continuité). Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. Soit $a \in U$. Alors

$$f \text{ différentiable en } a \implies f \text{ continue en } a.$$

On fait maintenant le lien avec le chapitre 1 sur les fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

Proposition 2.1.6 (Diff. implique dérivées directionnelles et donc dérivées partielles). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in U$. Alors, pour toute direction $v \in \mathbb{R}^n$ (de norme 1), f admet une dérivée en a suivant le vecteur v donnée par

$$D_v f(a) = df_a(v).$$

En particulier, toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ ($1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$) existent et $df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est donnée par

$$df_a(h) = Df(a)h.$$

Autrement dit la matrice de l'application linéaire df_a dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p n'est autre que la matrice jacobienne de f en a .

En particulier, pour $p = 1$ (fonctions à valeurs réelles), df_a est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n qui s'écrit via le produit scalaire dans \mathbb{R}^n avec le vecteur gradient :

$$df_a(h) = \langle \overrightarrow{\text{Grad}}_a f, h \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j \quad (2.1)$$

et donc

$$f(a+h) = f(a) + \langle \overrightarrow{\text{Grad}}_a f, h \rangle + o(h) \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

ATTENTION, la réciproque est fautive : l'existence de toutes les dérivées partielles ne suffit pas à assurer la différentiabilité, cf Exercices 1.4.11 et 2.4.1.

2.2 Opérations sur les différentielles

Sans surprise, si f et g sont différentiables en a alors toute combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et

$$d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a.$$

Bref, tout comme la dérivation, la différentiation est une opération linéaire.

Théorème 2.2.1 (Composition). Soit $g : U \subset E \rightarrow F$ et $f : U' \subset F \rightarrow G$. On suppose $g(U) \subset U'$. Si g est différentiable en $a \in U$ et f est différentiable en $g(a) \in U'$ alors $f \circ g$ est différentiable en a et

$$d(f \circ g)_a = df_{g(a)} \circ dg_a,$$

qu'on pourra préférer écrire¹

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \circ g'(a). \quad (2.2)$$

1. souvenons nous que, pour des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$ qui est une égalité entre nombres impliquant un produit, et observons que (2.2) est une égalité entre applications linéaires impliquant une composition.

Notation différentielle : il est très commode de noter df l'image par l'application linéaire $f'(x)$ d'un vecteur arbitraire noté dx , et donc

$$\underbrace{df}_{\in F} = \underbrace{f'(x)}_{\in \mathcal{L}(E,F)} \underbrace{dx}_{\in E}.$$

Par exemple, pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, l'égalité (2.1) s'écrit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

ce qui ne signifie pas autre chose que

$$df_a(h_1, \dots, h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Cette notation est un peu "dangereuse" mais permet de calculer relativement aisément certaines différentielles et dérivées partielles...

Exemple 2.2.2. Calculer, lorsqu'elle existe, la différentielle de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

puis retrouver le gradient calculé à l'Exercice 1.4.10.

En combinant le Théorème 2.2.1 et la Proposition 2.1.6, on comprend que la matrice jacobienne d'une composition est le produit des matrices jacobiniennes (sous hypothèse de différentiabilité bien sûr).

Corollaire 2.2.3. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , U' un ouvert de \mathbb{R}^p , $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in U$, $f : U' \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ différentiable en $g(a) \in U'$. Alors $f \circ g$ est différentiable en a et

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a))Dg(a),$$

ce qui donne accès aux dérivées partielles de $f \circ g$:

$$\frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(g(a)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(a), \quad 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq n. \quad (2.3)$$

Exercice 2.2.4. On se donne $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur \mathbb{R}^2 . On définit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(u, v) := f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

Calculer les dérivées partielles de F en fonction de celles de f . En déduire la résolution de l'équation aux dérivées partielles (où la fonction inconnue f est supposée différentiable sur \mathbb{R}^2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2.2.5. On se donne $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur \mathbb{R}^2 et $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur \mathbb{R} . On définit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(t) := f(x(t), y(t)).$$

Calculer la dérivée de F en fonction des dérivées partielles de f et des dérivées de x et y .

Application au "passage en polaires" : on se donne $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable et $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. On définit $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(r, \theta) = f \circ \varphi(r, \theta).$$

Calculer les dérivées partielles de F grâce à (2.3), puis grâce à la notation différentielle. Notons que le jacobien de l'application "polaires vers cartésiennes" $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ s'annule en $r = 0$. On en reparlera au Chapitre 4...

2.3 Inégalité des accroissements finis et applications

L'égalité des accroissements finis pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} se généralise facilement aux fonctions de E dans \mathbb{R} , cf Exercice 2.4.21. En revanche pour les fonctions à valeurs vectorielles, il n'y a pas d'égalité des accroissements finis.

Exemple 2.3.1. *La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ ne vérifie pas l'égalité des accroissements finis.*

Heureusement, l'inégalité des accroissements finis reste vraie pour les fonctions de la variable réelle à valeurs vectorielles (cf semestres précédents). On en déduit alors assez facilement l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions de E dans F .

Théorème 2.3.2 (Inégalité des accroissements finis). *Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ continue. Soit $[a, b]$ un segment inclus dans U . On suppose f différentiable sur le segment ouvert $]a, b[$ et*

$$M := \sup_{0 < t < 1} \|f'(a + t(b - a))\| < +\infty.$$

Alors

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq M \|b - a\|_E.$$

On a vu à la Proposition 2.1.6 que, pour des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , "différentiabilité implique dérivées partielles" mais que la réciproque est fautive (cf Exercice 2.4.1). Néanmoins si on ajoute la continuité des dérivées partielles on a bien que "dérivées partielles continues implique différentiabilité", ce qui est bien pratique car il est plus agréable de calculer des dérivées partielles que de différentier... Notons que la preuve du théorème ci-dessous utilise l'inégalité des accroissements finis d'où sa présence dans cette section !

Théorème 2.3.3 (Dérivées partielles continues implique diff.). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$. On suppose que toutes les dérivées partielles de f existent au voisinage de a et sont continues en a . Alors f est différentiable en a et*

$$df_a(h) = Df(a)h \quad \text{pour } h \in \mathbb{R}^n.$$

En particulier, pour $p = 1$ (fonctions à valeurs réelles), on a

$$df_a(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j \quad \text{pour } h \in \mathbb{R}^n.$$

Corollaire-Definition 2.3.4 (Classe C^1). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est différentiable sur U et $a \in U \mapsto df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est continue sur U
- (ii) toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues sur U .

Si elles sont satisfaites alors on dit que f est de classe C^1 sur U .

Corollaire 2.3.5. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable sur U supposé convexe. Alors f est constante sur U si et seulement si la différentielle df est nulle.*

2.4 Exercices

Différentielles et dérivées partielles

Exercice 2.4.1. On reprend la fonction g de l'Exemple 1.1.2. Montrer que $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ existent. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Que dit cet exercice sur la Proposition 2.1.6 ?

Exercice 2.4.2. On donne $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2y + 3y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0,0)$, que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, et que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2.4.3. On donne $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, e^{2t}, t \right).$$

Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et que f devient alors différentiable en 0. Que vaut df_0 ?

Exercice 2.4.4. On donne $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, e^{2t}, t \ln |t| \right).$$

Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et étudier alors la différentiabilité de f en 0.

Exercice 2.4.5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y.$$

1. La fonction f admet-elle des dérivées directionnelles en tout point de \mathbb{R}^2 suivant tous les vecteurs ?
2. Soit $u = (a, b)$ un vecteur non nul de \mathbb{R}^2 . Calculer, à l'aide de la définition, $D_u f(1, 2)$ la dérivée directionnelle de f au point $(1, 2)$ suivant u .
3. En déduire $df_{(1,2)}$ la différentielle de f en $(1, 2)$.
4. En déduire les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

Exercice 2.4.6. Calculer la différentielle de f au point (a, b) dans les cas suivants.

1. $f(x, y) = x\sqrt{y}$, $(a, b) = (1, 4)$.
2. $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $(a, b) = (6, 3)$.
3. $f(x, y) = \sin(x + 2y)$, $(a, b) = (\pi, 0)$.
4. $f(x, y) = \sqrt{x + e^y}$, $(a, b) = (1, 0)$.

Exercice 2.4.7. Pour les quatre fonctions f, g, h, u de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définies ci-dessous :

1. En quels points la fonction est-elle continue ?
2. Calculer les dérivées partielles aux points où elles existent.

3. En quels points la fonction admet-elle des dérivées directionnelles suivant tout vecteur ?
 4. En quels points la fonction est-elle différentiable ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour u , on pourra considérer la restriction de u à la parabole d'équation $y = x^2$.

Exercice 2.4.8. Trouver les $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

On pourra "passer en polaires".

Calculs de différentielles

Exercice 2.4.9. On donne $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est différentiable en tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer df_A .

Exercice 2.4.10. Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = {}^tAA$ est différentiable en tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer df_A .

Exercice 2.4.11 (Forme bilinéaire.). Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle. Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (U, V) \mapsto {}^tUMV$$

où les éléments de \mathbb{R}^2 sont écrits en colonne. On note (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 . Montrer que f est différentiable, et calculer $df_{(e_1, e_1)}(e_2, e_2)$.

Exercice 2.4.12. On considère $f : GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A^{-1}$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère une norme $\|\cdot\|$ qui vérifie $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$ (ça existe ?...). Montrer que si $\|H\| < 1$ alors $I_n - H \in GL_n(\mathbb{R})$ et

$$(I_n - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} H^k.$$

3. Montrer que f est différentiable en I_n et préciser df_{I_n} .
4. Montrer que f est différentiable en tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et préciser df_A .

Exercice 2.4.13. On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur \mathbb{R} . On définit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x, y, z) = f(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2).$$

Montrer que g est différentiable sur \mathbb{R}^3 et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, t, t) + \frac{\partial g}{\partial y}(t, t, t) + \frac{\partial g}{\partial z}(t, t, t) = 0.$$

Exercice 2.4.14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur \mathbb{R}^2 . On définit des fonctions $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x, y) = f(y, x), \quad h(x) = f(x, -x).$$

Montrer que g et h sont différentiables, et déterminer leurs différentielles en fonction des dérivées partielles de f .

Exercice 2.4.15. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|_2},$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne. Montrer que f est différentiable, et déterminer sa différentielle.

Exercice 2.4.16 (Différentiabilité des applications homogènes.). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit qu'une application $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \rightarrow \mathbb{R}^p$ est positivement homogène de degré λ si

$$g(tx) = t^\lambda g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ tout } t > 0.$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application différentiable en 0, telle que $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ est positivement homogène de degré 1. Montrer que $f(0) = 0$, puis que f est linéaire.
2. Une norme sur \mathbb{R}^n , vue comme application $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, peut-elle être différentiable à l'origine ?

Exercice 2.4.17 (Identité d'Euler pour les applications homogènes.). Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Montrer que f est homogène de degré $\lambda > 0$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad df_x(x) = \lambda f(x).$$

Fonctions de classes C^1

Exercice 2.4.18. Montrer que les deux fonctions f et g suivantes sont de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Exercice 2.4.19. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^4 + 2y^4.$$

Pour cela on pourra, pour un (x_0, y_0) fixé, considérer la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f(tx_0, ty_0).$$

Exercice 2.4.20. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application déterminant définie par $f(M) = \det M$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 0, sauf en position (i, j) où le coefficient est 1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\frac{\partial f}{\partial E_{ij}}(A)$, en s'aidant du développement du déterminant suivant une ligne (ou une colonne).
3. Montrer que $df_A(H) = \text{Tr}({}^t \text{Com}(A)H)$.

Accroissements finis

Exercice 2.4.21. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . Soit a et b deux points de U tels que $[a, b] \subset U$. Montrer l'égalité des accroissements finis :

$$\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = df_c(b - a).$$

Pour cela, on se ramènera à une fonction de la variable réelle.

Exercice 2.4.22. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = \left(\frac{\sin(x + y)}{2}, \frac{\cos(x - y)}{2} \right).$$

Montrer que, si on munit \mathbb{R}^2 de la norme $\|\cdot\|_2$, f est contractante (cad k -lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$). En déduire qu'il existe un unique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$.

Que se serait-il passé si on avait choisi la norme $\|\cdot\|_\infty$ ou la norme $\|\cdot\|_1$?

Exercice 2.4.23 (Fonction convexe). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert convexe U de \mathbb{R}^n . On dit que f est convexe si

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \forall (x, y) \in U^2, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Montrer que, si f est différentiable sur U , alors elle est convexe si et seulement si elle vérifie $f(y) - f(x) \geq df_x(y - x)$ pour tout $(x, y) \in U^2$.

Exercice 2.4.24 (Longueur d'une courbe). On munit \mathbb{R}^n d'une norme notée $\|\cdot\|$. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1 . Une subdivision σ de $[0, 1]$ est la donnée de $k + 1$ réels t_0, t_1, \dots, t_k ($k \geq 1$) tels que

$$t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = 1.$$

On écrit $\sigma = (t_0, \dots, t_k)$. A une telle subdivision est associée une ligne brisée dans \mathbb{R}^n , dont la longueur est

$$L(\sigma) := \sum_{i=0}^{k-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|.$$

On appelle longueur de γ le nombre $L := \sup L(\sigma)$, où la borne supérieure est prise sur l'ensemble de toutes les subdivisions σ de $[0, 1]$.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ quelconques. Quelle est la longueur de la courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\gamma(t) = (1 - t)x + ty$?
2. Montrer que toute courbe de classe C^1 est de longueur finie. Montrer qu'un segment de droite est le plus court chemin pour aller d'un point de \mathbb{R}^n à un autre.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un $r > 0$ tel que,

$$\forall (s, t) \in [0, 1]^2, |t - s| \leq r \implies \|\gamma(t) - \gamma(s) - (t - s)\gamma'(s)\| \leq \varepsilon|t - s|.$$

4. En déduire que $L = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$.

Exercice 2.4.25. Montrer que si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée de classe C^1 vérifiant $\gamma([0, 1]) \subset U$, alors sa longueur $L(\gamma)$ vérifie

$$\|f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))\| \leq L(\gamma) \sup_{t \in [0, 1]} \|df_{\gamma(t)}\|.$$

Chapitre 3

Différentielles d'ordre supérieur

Dans tout ce chapitre E et F désignent des \mathbb{R} espaces vectoriels normés de dimension finie, par exemple \mathbb{R}^n , ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n . On désignera par U un ouvert de E . On va considérer des fonctions f

$$f : U \subset E \rightarrow F.$$

3.1 Différentielle seconde

Prenons $f : U \subset E \rightarrow F$ différentiable sur U . On dispose donc de l'application

$$\begin{aligned} df : U \subset E &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x &\mapsto df_x. \end{aligned}$$

L'ensemble des applications linéaires continues $\mathcal{L}(E, F)$ étant lui même un espace vectoriel de dimension finie, on peut se demander si, pour un $a \in U$ fixé, l'application df est différentiable au point a . Si oui, on dira que f est deux fois différentiable en a . Si ceci est vrai pour tout $a \in U$ alors on dira que f est deux fois différentiable sur U .

De quels objets parlons nous?... Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est deux fois différentiable en $a \in U$ alors

$$[d(df)]_a \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)).$$

Ainsi, pour $h \in E$, $[d(df)]_a(h) \in \mathcal{L}(E, F)$. Ainsi pour $k \in E$, $\{[d(df)]_a(h)\}(k) \in F$. C'est horrible... On va donc systématiquement confondre $[d(df)]_a$ avec l'application bilinéaire de $E \times E$ dans F notée $d^2 f_a$, ou $d^2 f(a)$, et définie par

$$d^2 f(a)(h, k) := \{[d(df)]_a(h)\}(k), \quad \text{pour tout } (h, k) \in E^2. \quad (3.1)$$

On peut alors montrer¹ que, en plus d'être bilinéaire, $d^2 f(a)$ est également symétrique, c'est à dire

$$d^2 f(a)(h, k) = d^2 f(a)(k, h), \quad \text{pour tout } (h, k) \in E^2. \quad (3.2)$$

Evidemment, si $f : U \subset E \rightarrow F$ est deux fois différentiable sur U et si

$$x \in U \mapsto d^2 f(x) \in \mathcal{BIL}(E \times E, F)$$

est continue sur U , on dira que f est de classe C^2 sur U .

1. cela utilise les accroissements finis et n'a rien d'évident !

Exemple 3.1.1. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow F$, f est deux fois différentiable en a si et seulement si f est deux fois dérivable en a et on a

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, d^2 f(a)(h, k) = hk f''(a).$$

Exemple 3.1.2. Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors f est deux fois différentiable sur E et pour tout $x \in E$, $d^2 f(x) = 0_{\mathcal{BIL}(E \times E, F)}$, cad $d^2 f(x)(h, k) = 0_F$ pour tout $(h, k) \in E^2$.

Exemple 3.1.3. On reprend $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'Exercice 2.4.9. Que vaut $d^2 f(A)(H, K)$?

Exemple 3.1.4. Si $B : E \times E \rightarrow F$ est une application bilinéaire alors B est deux fois différentiable en tout point $(x, y) \in E^2$ et

$$d^2 B(x, y)((h_1, h_2), (k_1, k_2)) = B(k_1, h_2) + B(h_1, k_2).$$

En particulier, $d^2 B(x, y)$ ne dépend pas de (x, y) et donc $d^2 B$ est constante.

3.2 Dérivées partielles d'ordre 2, Schwartz, Matrice hessienne

Dans cette section, on considère des $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Si f est C^1 sur U alors on sait que, pour tout $1 \leq i \leq n$, l'application $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est continue sur U . Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet une dérivée partielle par rapport en x_j en $a \in U$, alors

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a) \quad \text{se note} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a),$$

et on parle de dérivée partielle d'ordre 2.

Exemple 3.2.1. Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 y + e^{xy} + y$.

De même que la Proposition 2.1.6 nous disait que, en cas d'existence, la différentielle s'écrit à l'aide des dérivées partielles d'ordre 1, le résultat suivant nous dit que, en cas d'existence, la différentielle seconde s'écrit à l'aide des dérivées partielles d'ordre 2.

Proposition 3.2.2 (Diff. seconde implique dérivées partielles d'ordre 2). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U et deux fois différentiable en $a \in U$. Alors toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f en a existent et, $d^2 f_a$ est donnée par

$$d^2 f(a)(h, k) = \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a) h_i k_j, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \quad (3.3)$$

ATTENTION, la réciproque est fautive : l'existence de toutes les dérivées partielles d'ordre 2 ne suffit pas à assurer la différentiabilité d'ordre 2, cf Exercice 3.6.1.

De la symétrie de $d^2 f(a)$ et de la Proposition 3.2.2, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.3 ("Théorème de Schwartz"). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U et deux fois différentiable en $a \in U$. Alors toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f en a existent et, pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a).$$

Le résultat ci-dessus est un simple corollaire. Le “vrai” théorème de Schwartz conclut également que “les dérivées partielles commutent”, mais sous des hypothèses plus faibles portant sur les dérivées partielles et non sur la différentiabilité seconde.

On remarque que la formule (3.3) s’écrit

$$d^2f(a)(h, k) = \langle h, D^2f(a)k \rangle = {}^t h D^2f(a)k, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (3.4)$$

où la matrice carrée

$$D^2f(a) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (3.5)$$

s’appelle la matrice hessienne de f en a , parfois aussi notée $\text{Hess}f(a)$.

Ainsi, sous les hypothèses de la Proposition 3.2.2, la matrice hessienne $D^2f(a)$ est symétrique réelle, et n’est autre que la matrice de la forme bilinéaire symétrique d^2f_a par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^n .

Théorème 3.2.4 (Classe C^2). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est de classe C^2 sur U si et seulement si toutes les dérivées partielles d’ordre inférieur ou égal à 2 existent et sont continues sur U . Dans ce cas, les “dérivées partielles commutent”.*

3.3 Taylor-Young à l’ordre 2 et extrema

Dans cette section, on considère des $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs réelles.

La formule de Taylor-Young permet d’approcher *localement* une fonction.

Théorème 3.3.1 (Taylor-Young à l’ordre 2 pour f à valeurs réelles). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, différentiable sur U et deux fois différentiable en $a \in U$. Alors il existe un voisinage V de 0 et une fonction $\varepsilon : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0,$$

tels que, pour tout $h \in V$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}d^2f_a(h, h) + \|h\|^2\varepsilon(h) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \|h\|^2\varepsilon(h) \\ &= f(a) + \underbrace{\langle \vec{\text{Grad}}_a f, h \rangle}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle h, D^2f(a)h \rangle}_{\text{partie quadratique}} + \|h\|^2\varepsilon(h). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Applications à la recherche d’extrema

Commençons par une fonction de la variable réelle $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qu’on suppose “assez régulière”. Si f admet un extremum local en $a \in U$ alors on sait que $f'(a) = 0$, qui est donc une condition nécessaire d’extremum. Réciproquement si $a \in U$ est tel que $f'(a) = 0$ (on parle de point critique) alors la formule de Taylor-Young nous dit que

1. si $f''(a) > 0$ alors f a un minimum local en a .

2. si $f''(a) < 0$ alors f a un maximum local en a .

En revanche si $f''(a) = 0$ alors “tout est possible” : pas d’extremum local ou maximum local ou minimum local en a .

Exemple 3.3.2. Avec $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto -x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^4$, on comprend tout...

Pour les fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ “assez régulière”, la condition de point critique devient $df_a = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$ soit encore $\overrightarrow{\text{Grad}}_a f = 0_{\mathbb{R}^n}$ soit encore $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$. Réciproquement si $a \in U$ est un point critique alors la formule de Taylor-Young nous dit que

1. si la matrice hessienne $D^2f(a)$ est définie positive alors f a un minimum local en a (cf paraboloïde Figure 1.1 gauche).
2. si la matrice hessienne $D^2f(a)$ est définie négative alors f a un maximum local en a .
3. si la matrice hessienne $D^2f(a)$ n’est ni positive ni négative alors f n’a pas d’extremum en a . On dit que f admet un point selle en a (cf selle de cheval Figure 1.1 droite).

Noter que dans le cas où $D^2f(a)$ est positive (resp. négative) mais pas définie positive (resp. pas définie négative), “tout peut arriver”.

Exemple 3.3.3. Avec $(x, y) \mapsto x + y^2$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$, $(x, y) \mapsto -x^2 - y^2$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^4$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^4$, on comprend tout...

Exemple 3.3.4. On donne $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$. Montrer que le point critique $(-1, -1, -1)$ est un point selle.

Pour $n = 2$ (fonctions de deux variables), $D^2f(a)$ est une matrice symétrique réelle de taille 2 et il est facile de tester si elle est définie positive, ou définie négative, ou ni positive ni négative. On peut retenir la méthodologie suivante.

Corollaire 3.3.5 (Recherche d’extrema pour fonction de 2 variables). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U et $(x_0, y_0) \in U$ un point critique de f , c’est à dire

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Supposons f deux fois différentiable en (x_0, y_0) . Alors le déterminant de la matrice hessienne $D^2f(x_0, y_0)$ (qu’on appelle le Hessien de f en (x_0, y_0)) et la trace de la matrice hessienne $D^2f(x_0, y_0)$ disent “beaucoup”... Précisément :

1. Si $\text{DET } D^2f(x_0, y_0) > 0$ et $\text{TR } D^2f(x_0, y_0) > 0$ alors f a un minimum local en (x_0, y_0) .
2. Si $\text{DET } D^2f(x_0, y_0) > 0$ et $\text{TR } D^2f(x_0, y_0) < 0$ alors f a un maximum local en (x_0, y_0) .
3. Si $\text{DET } D^2f(x_0, y_0) < 0$ alors f admet un point selle en a .

Evidemment pour le cas dégénéré $\text{DET } D^2f(x_0, y_0) = 0$, il n’y a pas de conclusion définitive.

Exemple 3.3.6. Déterminer les extrema de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.

3.4 Formule de Taylor intégral à l’ordre 2

La formule de Taylor intégral est une formule *exacte* et *globale*. Elle réclame des hypothèses plus fortes que celles qui permettent d’obtenir la formule locale de Taylor-Young.

Théorème 3.4.1 (Taylor intégral à l'ordre 2 pour f à valeurs réelles). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 sur U . Soit un segment $[a, a+h] \subset U$. Alors

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + df_a(h) + \int_0^1 (1-t) d^2 f_{a+th}(h, h) dt \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sous l'hypothèse "classe C^2 " (plus forte que les hypothèses du Théorème 3.3.1), grâce à Taylor intégral ci-dessus on retrouve la formule de Taylor-Young du Théorème 3.3.1.

3.5 Différentielles d'ordre supérieur

En Section 3.1, on a défini la différentielle seconde. Il n'y a aucune raison de s'arrêter en si bon chemin : prenons $f : U \subset E \rightarrow F$ deux fois différentiable sur U . On dispose donc de l'application

$$\begin{aligned} d^2 f : U \subset E &\rightarrow \mathcal{BIL}(E \times E, F) \\ x &\mapsto d^2 f_x. \end{aligned}$$

Si, pour un $a \in U$ fixé, l'application $d^2 f$ est différentiable au point a , on dira que f est trois fois différentiable en a . L'application différentielle troisième en a , notée $d^3 f_a$, est trilinéaire symétrique, c'est à dire que, pour toute permutation σ de $\{1, 2, 3\}$,

$$d^3 f_a(h_{\sigma(1)}, h_{\sigma(2)}, h_{\sigma(3)}) = d^3 f_a(h_1, h_2, h_3), \quad \forall (h_1, h_2, h_3) \in E^3.$$

Puis, pour tout $k \geq 1$, on peut donner un sens à " f est k fois différentiable en a ". En cas d'existence, $d^k f_a$ est k linéaire symétrique.

Pour conclure, signalons que :

- la formule Taylor-Young à l'ordre 2 du Théorème 3.3.1 se généralise à l'ordre $p \geq 3$: si f est $p-1$ fois différentiable sur U et p fois différentiable en a alors la conclusion (3.6) est remplacée par

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} d^k f_a(h, \dots, h) + \|h\|^p \varepsilon(h).$$

- la formule Taylor intégral à l'ordre 2 du Théorème 3.4.1 se généralise à l'ordre $p+1 \geq 3$: si f est de classe C^{p+1} sur U alors la conclusion (3.7) est remplacée par

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} d^k f_a(h, \dots, h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} d^{p+1} f_{a+th}(h, \dots, h) dt.$$

3.6 Exercices

Exercice 3.6.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ existent, et les calculer.

2. Les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent-elles ? Qu'observe-t-on ? Que peut-on en conclure ?

Exercice 3.6.2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les extrema locaux et globaux.

1. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ définie sur \mathbb{R}^2 .
2. $f(x, y) = (x - y)e^{xy}$ définie sur \mathbb{R}^2 .
3. $f(x, y) = x^2 + ay^4$ définie sur \mathbb{R}^2 , où a est un paramètre réel.
4. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 2$ définie sur \mathbb{R}^2 .
5. $f(x, y, z) = (x + y)e^{x+y-z^2}$ définie sur \mathbb{R}^3 .
6. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ définie sur le rectangle $[0, 3] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$.

Exercice 3.6.3. On donne $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2.$$

1. Déterminer les points critiques de f .
2. On définit maintenant

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Faire un dessin. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur C . Les déterminer.

Exercice 3.6.4. 1. Montrer que si une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possède deux maxima locaux, alors elle possède également au moins un minimum local.

2. Étudier les extrema de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$. Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 3.6.5. 1. Montrer que si une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet un unique extremum local, alors cet extremum est nécessairement un extremum global.

2. Étudier les extrema de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ sur \mathbb{R}^2 . Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 3.6.6. 1. Trouver un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable à l'origine, telle que $df(0) = 0$ et $d^2f(0) = 0$, et admettant un minimum local non strict en 0.

2. Même question mais avec, cette fois, un minimum local strict en 0.
3. Même question mais avec, cette fois, pas d'extremum local en 0.

Exercice 3.6.7 (Le Laplacien). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On définit le "Laplacien de f " par :

$$\Delta f(x) := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x).$$

Soit $B = B(0, 1)$ la boule unité ouverte de \mathbb{R}^n , de centre 0 et de rayon 1, pour la norme euclidienne $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

1. Relier $\Delta f(x)$ à la matrice Hessienne $\text{Hess } f(x)$.

2. On suppose dans cette question que $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in B$. On veut montrer que

$$f(x) < \max_{\|y\|=1} f(y), \quad \forall x \in B.$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un $x \in B$ pour lequel $f(x) \geq \max_{\|y\|=1} f(y)$.

(a) Montrer que f admet un maximum local en un point $x_0 \in B$.

(b) En déduire une contradiction en utilisant la propriété suivante : si une matrice symétrique définit une forme quadratique négative, alors la trace de cette matrice est négative ou nulle.

3. On suppose maintenant que $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in B$ (on dit que f est harmonique sur B). On veut montrer que

$$\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y), \quad \forall x \in B.$$

(a) Pour $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon \|x\|^2$. Appliquer la question précédente et faire tendre ε vers 0 pour montrer l'inégalité "de droite".

(b) Comment montrer l'autre inégalité ?

Exercice 3.6.8 (Laplacien en polaires). On se donne $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. On définit $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(r, \theta) = f \circ \varphi(r, \theta).$$

Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, $\frac{\partial F}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$, en fonction de celles de f , et montrer que

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta),$$

soit encore $\Delta f(x, y) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) (r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta)$.

Exercice 3.6.9. Trouver les $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On pourra poser $F(u, v) = f(u + v, u - v)$.

Exercice 3.6.10. On donne $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u(t, x) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

vérifie l'équation des ondes

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Chapitre 4

Les théorèmes pour “inverser”

4.1 Le théorème des fonctions implicites

4.1.1 Un cas simple mais éclairant ($f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, disons de classe C^1 , et on s'intéresse aux points (x, y) du plan euclidien \mathbb{R}^2 d'annulation de f :

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}.$$

On suppose que Γ est non vide. On prend un point référence $(x_0, y_0) \in \Gamma$ et on se demande si, localement, les points (x, y) de Γ peuvent être décrits par $y = \varphi(x)$ où φ est une fonction définie et de classe C^1 sur un voisinage de x_0 . C'est notre objectif 1.

Par exemple si

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

Γ n'est autre que le cercle de centre O de coordonnées $(0, 0)$ et de rayon 1. On comprend sur le dessin que notre objectif 1 est atteignable si $(x_0, y_0) \neq (-1, 0)$ et $(x_0, y_0) \neq (1, 0)$ et, dans ce cas, on a même une expression explicite de la fonction φ recherchée :

- pour un point $(x_0, y_0) \in \Gamma$ avec $y_0 > 0$ on a

$$\left((x, y) \in]-1, 1[\times]0, 1[\text{ et } f(x, y) = 0 \right) \iff y = \sqrt{1 - x^2},$$

et $\varphi :]-1, 1[\rightarrow]0, 1[$ est définie par $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

- pour un point $(x_0, y_0) \in \Gamma$ avec $y_0 < 0$ on a

$$\left((x, y) \in]-1, 1[\times]-1, 0[\text{ et } f(x, y) = 0 \right) \iff y = -\sqrt{1 - x^2},$$

et $\varphi :]-1, 1[\rightarrow]-1, 0[$ est définie par $\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

En revanche, l'objectif 1 ne peut être atteint si $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ ou $(x_0, y_0) = (1, 0)$ car, en ces points, les tangentes au cercle sont verticales ce qui vient du fait que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\pm 1, 0) = 0.$$

Dans les cas généraux, la fonction φ , lorsqu'elle existe, n'est pas explicite. Malgré cela, on aimerait calculer ses éventuelles dérivées, ce qui permet par exemple de mieux la comprendre, notamment localement via disons une formule de Taylor-Young. Notons qu'en dérivant formellement

$$f(x, \varphi(x)) = 0,$$

on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0, \quad (4.1)$$

et donc

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))},$$

sous réserve que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \neq 0$ mais ça on l'avait déjà pressenti ci-dessus...

Proprement cela donne :

Théorème 4.1.1 (Théorème des fonctions implicites pour $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$). *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k ($k \geq 1$) sur l'ouvert Ω . On suppose que $(x_0, y_0) \in \Omega$ est tel que*

$$f(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Alors il existe $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ et une fonction $\varphi :]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2[\rightarrow]y_0 - \beta_1, y_0 + \beta_2[$ tels que

$$\left((x, y) \in]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2[\times]y_0 - \beta_1, y_0 + \beta_2[\text{ et } f(x, y) = 0 \right) \iff y = \varphi(x).$$

De plus cette fonction φ hérite de la régularité de f : elle est de classe C^k et

$$\varphi'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))},$$

pour tout $x \in]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2[$. Si $k \geq 2$ on peut calculer les dérivées successives de φ en dérivant (4.1). Par exemple, pour la dérivée seconde, on trouve

$$\varphi''(x) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) - 2\varphi'(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \varphi(x)) - (\varphi'(x))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad (4.2)$$

pour tout $x \in]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2[$.

Dans la situation du théorème ci-dessus on dit que $f(x, y) = 0$ définit, au voisinage de (x_0, y_0) , y comme fonction implicite de x .

Exemple 4.1.2. *Montrer que la relation $x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 = 1$ définit y comme fonction de x au voisinage du point $(-1, 1)$. Quelle est l'allure de Γ en ce point ?*

Application géométrique. On se donne $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et un point (x_0, y_0) dans Γ . Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ alors, localement, on peut tirer y en fonction de x (implicitement). Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ mais que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ alors, localement, on peut tirer x en fonction de y (implicitement). Dans le cas ennuyeux

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

on dit que (x_0, y_0) est un point critique de f . Ainsi

$$(x_0, y_0) \text{ point critique de } f \iff \overrightarrow{\text{Grad}} f(x_0, y_0) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Exemple 4.1.3. *Quid de $f(x, y) = x^2 - y^2$? Faire un dessin.*

Définition 4.1.4 (Courbe régulière du plan \mathbb{R}^2). Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k ($k \geq 1$). On dit que

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}$$

est une courbe régulière de classe C^k du plan \mathbb{R}^2 si

$$\Gamma \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \Gamma, \overrightarrow{\text{Grad}} f(x, y) \neq 0_{\mathbb{R}^2}.$$

On dit alors que $f(x, y) = 0$ est une équation cartésienne de la courbe régulière Γ .

Définition 4.1.5 (Arc paramétré de \mathbb{R}^2). Un arc paramétré de classe C^k ($k \geq 1$) sur \mathbb{R}^2 est une application $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k , où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . L'arc est dit régulier si $\gamma'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Enfin l'ensemble $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^2$ est appelé support de l'arc paramétré.

La moralité de ce qui précède est que toute courbe régulière est, en tout point, localement décrite par un arc paramétré régulier avec

$$\gamma(x) = (x, \varphi(x)) \quad \text{ou} \quad \gamma(y) = (\psi(y), y).$$

Ainsi toute courbe régulière de \mathbb{R}^2 est, localement, un objet de dimension 1. D'autre part, la tangente à Γ en $(x_0, y_0) \in \Gamma$ est la droite passant par (x_0, y_0) et de vecteur normal $\overrightarrow{\text{Grad}} f(x_0, y_0)$, soit la droite d'équation

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

4.1.2 Le cas $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Précédemment on regardait des “courbes” du plan \mathbb{R}^2 d'équation $f(x, y) = 0$ et on essayait de les décrire implicitement par $y = \varphi(x)$ où $\varphi : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ici on va regarder des “surfaces” de l'espace \mathbb{R}^3 d'équation $f(x, y, z) = 0$ et on essaie de les décrire implicitement par $z = \varphi(x, y)$ où $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème 4.1.6 (Théorème des fonctions implicites pour $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$). Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k ($k \geq 1$) sur l'ouvert Ω . On suppose que $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ est tel que

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Alors il existe un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) (donc dans \mathbb{R}^2), un voisinage ouvert V de z_0 (donc dans \mathbb{R}) et $\varphi : U \rightarrow V$ tels que

$$\left((x, y, z) \in U \times V \text{ et } f(x, y, z) = 0 \right) \iff z = \varphi(x, y).$$

De plus cette fonction φ hérite de la régularité de f : elle est de classe C^k et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}, \quad (4.4)$$

pour tout $(x, y) \in U$, qu'on peut aussi écrire

$$\overrightarrow{\text{Grad}} \varphi(x, y) = -\frac{1}{f'_{x,y,\bullet}(\varphi(x, y))} \overrightarrow{\text{Grad}} f_{\bullet,\bullet,\varphi(x,y)}(x, y),$$

avec des notations à préciser en cours...

Exemple 4.1.7. Montrer que la relation $x + y + z + \sin(xyz) = 0$ définit z comme fonction de x et de y au voisinage du point $(0, 0, 0)$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en $(x, y) = (0, 0)$.

Application géométrique. Dans \mathbb{R}^2 les courbes régulières sont localement paramétrées par un arc régulier. Sans surprise, dans \mathbb{R}^3 les surfaces régulières sont localement paramétrées par une nappe régulière.

Définition 4.1.8 (Surface régulière de l'espace \mathbb{R}^3). Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k ($k \geq 1$). On dit que

$$\Gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = 0\}$$

est une surface régulière de classe C^k de l'espace \mathbb{R}^3 si

$$\Gamma \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma, \overrightarrow{\text{Grad}} f(x, y, z) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}.$$

On dit alors que $f(x, y, z) = 0$ est une équation cartésienne de la surface régulière Γ .

Définition 4.1.9 (Nappe paramétrée de \mathbb{R}^3). Une nappe paramétrée de classe C^k ($k \geq 1$) sur \mathbb{R}^2 est une application $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k , où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 . La nappe est dite régulière si $dS(x, y)$ est de rang 2 pour tout $(x, y) \in \Omega$. Enfin l'ensemble $S(\Omega) \subset \mathbb{R}^3$ est appelé support de la nappe paramétrée.

La moralité de ce qui précède est que toute surface régulière est, en tout point, localement décrite par une nappe paramétrée régulière, avec

$$S(x, y) = (x, y, \varphi(x, y)) \text{ ou } S(x, z) = (x, \psi(x, z), z) \text{ ou } S(y, z) = (\theta(y, z), y, z).$$

Ainsi toute surface régulière de \mathbb{R}^3 est, localement, un objet de dimension 2. D'autre part, le plan tangent à Γ en $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ est le plan passant par (x_0, y_0, z_0) et de vecteur normal $\overrightarrow{\text{Grad}} f(x_0, y_0, z_0)$, soit le plan d'équation

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

4.1.3 Le cas "général" $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$

Théorème 4.1.10 (Théorème des fonctions implicites). Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^k ($k \geq 1$) sur l'ouvert Ω . On suppose que $(x_0, y_0) \in \Omega$ (avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $y_0 \in \mathbb{R}^p$) est tel que

$$f(x_0, y_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p} \text{ et } df_{x_0, \bullet}(y_0) \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^p).$$

Alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 (donc dans \mathbb{R}^n), un voisinage ouvert V de y_0 (donc dans \mathbb{R}^p) et une fonction $\varphi : U \rightarrow V$ tels que

$$\left((x, y) \in U \times V \text{ et } f(x, y) = \mathbf{0} \right) \iff y = \varphi(x).$$

De plus cette fonction φ hérite de la régularité de f : elle est de classe C^k et, pour tout $x \in U$,

$$\underbrace{d\varphi(x)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} = - \underbrace{(df_{x, \bullet}(\varphi(x)))^{-1}}_{\in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^p)} \circ \underbrace{df_{\bullet, y}(x)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)},$$

ce qui donne notamment accès aux dérivées partielles de φ ...

Une preuve possible de ce théorème utilise le théorème du point fixe de Banach (dont on reparlera au Chapitre 8).

Exemple 4.1.11. Dans \mathbb{R}^3 soit S_1 la surface d'équation $x^2 + y^2 - 2z^2 - 1 = 0$ et S_2 celle d'équation $x^2 + 2y^2 + z^2 = 5$. Appliquer le théorème des fonctions implicites autour du point $\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ qui est sur $S_1 \cap S_2$.

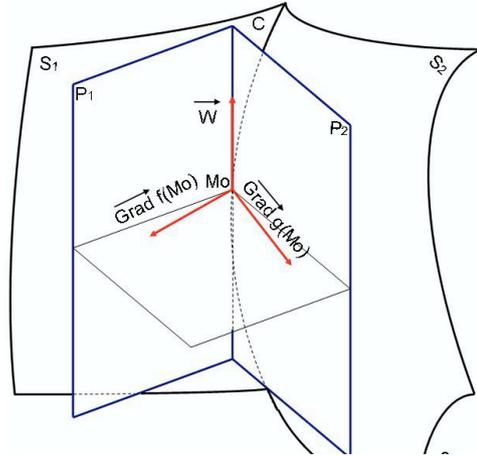


FIGURE 4.1 – Une intersection de surfaces régulières S_1 (d'équation cartésienne $g(x, y, z) = 0$) et S_2 (d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$) donnant une courbe régulière C , cf <https://fr.wikipedia.org/wiki/Surface>.

4.2 Les théorèmes d'inversion

Définition 4.2.1 (C^k difféomorphisme). Soit $k \geq 1$, U un ouvert de \mathbb{R}^n et V un ouvert de \mathbb{R}^p . On dit que f est un C^k difféomorphisme de U sur V si

- (i) f est une bijection de U sur V ,
- (ii) f est de classe C^k sur U ,
- (iii) f^{-1} est de classe C^k sur V .

Exemple 4.2.2. $x \mapsto \tan x$ est un C^∞ difféomorphisme de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} . En revanche $x \mapsto x^3$ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , est de classe C^1 sur \mathbb{R} mais n'est pas un C^1 difféomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

Proposition 4.2.3. Supposons qu'il existe un C^k difféomorphisme ($k \geq 1$) f de $U \subset \mathbb{R}^n$ sur $V \subset \mathbb{R}^p$. Alors

1. $n = p$.
2. Pour tout $x \in U$, df_x est un automorphisme de \mathbb{R}^n , cad $df_x \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$, et pour tout $y \in V$, $d(f^{-1})_y$ est un automorphisme de \mathbb{R}^n , cad $d(f^{-1})_y \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$, et

$$d(f^{-1})_y = (df_{f^{-1}(y)})^{-1}.$$

Théorème 4.2.4 (Théorème d'inversion locale). Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geq 1$) sur l'ouvert Ω . On suppose que $x_0 \in \Omega$ est tel que

$$df_{x_0} = f'(x_0) \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n),$$

soit encore $Df(x_0) \in GL_n(\mathbb{R})$ (la matrice jacobienne est inversible).

Alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 et un voisinage ouvert V de $y_0 = f(x_0)$ tels que

$$f \text{ est un } C^k \text{ difféomorphisme de } U \text{ sur } V.$$

Une preuve possible de ce théorème utilise encore le théorème du point fixe de Banach (dont on reparlera au Chapitre 8).

Exemple 4.2.5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Décrire U l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 autour desquels f est un C^1 difféomorphisme local. Même question pour $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$.

ATTENTION, l'inversion locale n'a qu'une valeur locale... Il est possible qu'on puisse inverser partout localement mais pas globalement, notamment car l'injectivité "locale" n'implique pas l'injectivité "globale"...

Exemple 4.2.6. Considérer $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Montrer que "on a un difféomorphisme local autour de tout point (x_0, y_0) " mais que f n'est pas un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur $f(\mathbb{R}^2)$.

Néanmoins si on ajoute l'hypothèse d'injectivité on récupère un difféomorphisme global de Ω sur l'image de Ω par f (il faut bien récupérer la surjectivité!).

Théorème 4.2.7 (Théorème d'inversion globale). Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geq 1$) sur l'ouvert Ω . On suppose que

$$f \text{ est injective et } \forall x \in \Omega, df_x = f'(x) \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n).$$

Alors

$$f \text{ est un } C^k \text{ difféomorphisme de } \Omega \text{ sur } \Omega' := f(\Omega).$$

Exemple 4.2.8. Le "passage en polaires"

$$(r, \theta) \mapsto (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$$

est un C^∞ difféomorphisme de $U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ sur $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. La bijection réciproque "passage en cartésiennes" est

$$(x, y) \mapsto (r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \text{faisable mais pénible à écrire...}).$$

4.3 Exercices

Théorème des fonctions implicites

Exercice 4.3.1. En dérivant (4.1), aboutir à (4.2).

Exercice 4.3.2. Montrer que

$$\forall n \geq 0, \exists ! u_n \in \mathbb{R}, u_n^5 + nu_n - 1 = 0.$$

Montrer que $0 < u_n < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Afin de faire mieux, on peut utiliser le Théorème 4.1.1 : montrer qu'on peut écrire

$$u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \frac{e}{n^4} + \frac{f}{n^5} + \frac{g}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

avec des réels a, b, c, d, e, f, g à déterminer.

Exercice 4.3.3. D'où sort (4.3) ?

Exercice 4.3.4. Soit C la "courbe" de \mathbb{R}^2 définie par l'équation

$$x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0.$$

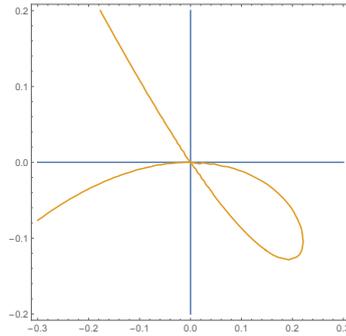


FIGURE 4.2 – Le point double de l’Exercice 4.3.7.

1. Montrer que, au voisinage du point $(0,0)$, l’ordonnée y d’un point de C est définie implicitement comme une fonction, de classe C^∞ , de x . On note φ une telle fonction.
2. Calculer les dérivées première et seconde de φ en 0.
3. Donner l’allure de la courbe C au voisinage du point $(0,0)$.

Exercice 4.3.5. Soit C la “courbe” de \mathbb{R}^2 définie par l’équation

$$x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0.$$

Vérifier que $a = (1,1)$ est sur C . Trouver la tangente à C en a . Déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en a .

Exercice 4.3.6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = 2 \cos^2 x + xy - e^y.$$

1. Montrer qu’il existe un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant 0 tel que, pour tout x dans I , il existe un unique $y > 0$, que tel que $f(x, y) = 0$. On note $\varphi(x)$ un tel y .
2. Montrer que la fonction $x \in I \mapsto \varphi(x) \in]0, +\infty[$ est de classe C^1 .
3. Montrer que $\varphi'(0) = \frac{\ln 2}{2}$.
4. Montrer que, pour tout $x \in I$, on a

$$\varphi'(x)(e^{\varphi(x)} - x) = \varphi(x) - 4 \sin x \cos x.$$

Exercice 4.3.7 (Un point double). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$x^3 + xy + y^2 e^{x+y} = 0.$$

Montrer qu’il existe deux fonctions distinctes φ_1 et φ_2 de classe C^1 sur un voisinage ouvert I de 0 telles que, pour $i = 1$ et $i = 2$, $f(x, \varphi_i(x)) = 0$ pour tout $x \in I$ (on pourra poser $y = xz$ et “impliciter autour de deux z bien choisis”). Préciser l’allure du graphe de φ_i autour de $(0,0)$. Vérifier que c’est cohérent avec la Figure 4.2.

Exercice 4.3.8. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1).$$

On note C la “courbe” de \mathbb{R}^3 définie par l’équation $f(x, y, z) = 0$.

1. Vérifier que le point $a = (1, 1, 1) \in C$.

2. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant 1, une $B \subset \mathbb{R}^2$ de centre $(1, 1)$, et une fonction $\varphi : I \rightarrow B$ tels que $(x, y, z) \in C \cap I \times B$ si et seulement si $(y, z) = \varphi(x)$.
3. Déterminer la tangente à C en a .

Exercice 4.3.9. Soit C la "courbe" de \mathbb{R}^3 définie par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \quad \text{et} \quad x^3 + y^3 + z^3 = 36.$$

Montrer que $(1, 2, 3) \in C$. Montrer que, dans un voisinage de ce point, les points de C peuvent s'écrire $(y, z) = \varphi(x)$ où φ est de classe C^1 . Préciser la tangente en chaque point.

Exercice 4.3.10. Montrer que l'équation $z^3 + 2z + e^z - x - y^2 = \cos(x - y + z)$ définit implicitement z comme fonction C^1 de x et y au voisinage du point $(0, 0, 0)$. Calculer les dérivées partielles de z à l'ordre 2 en 0.

Théorèmes d'inversion locale et globale

Exercice 4.3.11. L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^3 - 2xy^2, x + y)$ est-elle un difféomorphisme local en $a = (1, -1)$? Si oui, écrire la différentielle de son inverse local au point $b = f(a)$?

Exercice 4.3.12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Décrire ω l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 autour desquels f est un difféomorphisme local.
2. Est ce que f restreinte à ω est un difféomorphisme sur son image?
3. Pour tout point a de ω , écrire la différentielle de l'inverse local de f au point $f(a)$, et trouver un voisinage ouvert U de a tel que $f|_U$ soit un difféomorphisme sur son image.

Exercice 4.3.13 (Coordonnées polaires). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

1. Décrire ω l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 autour desquels f est un difféomorphisme local.
2. Pour tout point a de ω , écrire la différentielle de l'inverse local de f au point $f(a)$.
3. Est ce que f restreinte à ω est un difféomorphisme sur son image?
4. Montrer que f est un C^∞ difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty[\times \{0\})$.

Exercice 4.3.14 (Coordonnées sphériques). Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(r, \theta, \delta) = (r \cos \theta \cos \delta, r \sin \theta \cos \delta, r \sin \delta).$$

1. Décrire ω l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 autour desquels f est un difféomorphisme local.
2. Pour tout point a de ω , écrire la différentielle de l'inverse local de f au point $f(a)$.
3. Est ce que f restreinte à ω est un difféomorphisme sur son image?
4. Montrer que f est un C^∞ difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus ([0, +\infty[\times \{0\} \times \mathbb{R})$.

Exercice 4.3.15. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

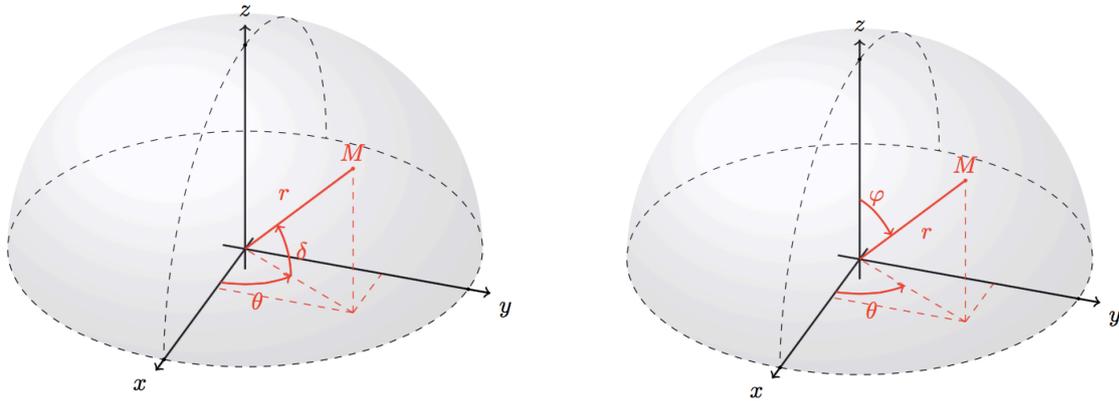


FIGURE 4.3 – Coordonnées sphériques. A gauche la convention (r, θ, δ) rayon-longitude-latitude comme dans l’Exercice 4.3.14. A droite la convention (r, θ, φ) rayon-longitude-colatitude.

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} , et que $f'(0) \neq 0$.
2. Si n est un entier non nul, montrer que

$$f' \left(\frac{1}{2n} \right) f' \left(\frac{1}{2n+1} \right) < 0,$$

et en déduire que f n’est injective sur aucun intervalle contenant 0, aussi petit soit-il.

3. Commentaires ?

Exercice 4.3.16 (Fonction “propre”). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est propre si l’image réciproque de tout compact de \mathbb{R}^p par f est compacte dans \mathbb{R}^n .

1. Les applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} suivantes sont elles propres¹ $x \mapsto 0$, $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto x^2$. Quid de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$?
2. Si f est propre et continue, montrer que f est fermée (i.e. l’image d’un fermé est fermée). On pourra montrer que, si F est fermé dans \mathbb{R}^p , alors $f(F)$ est séquentiellement fermé.
3. On suppose que f est injective, propre, de classe C^1 , et est un difféomorphisme local en tout point de \mathbb{R}^p (en particulier, $n = p$). Montrer que f est un difféomorphisme global de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n .

Exercice 4.3.17. Pour a et b réels, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + a \sin y, y + b \sin x).$$

1. Pour quelles valeurs de (a, b) f est-elle un difféomorphisme local en tout point ?
2. Montrer alors que f est injective.
3. Montrer alors que f est propre (cf Exercice 4.3.16).
4. Montrer alors que f est un difféomorphisme global de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 .

Exercice 4.3.18. Montrer que si $f \in C^1(\mathbb{R})$ et s’il existe $k > 0$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > k$, alors f est un difféomorphisme de \mathbb{R} sur lui même (on pourra, par exemple, montrer que f est propre). Montrer que ce résultat est faux avec $k = 0$.

1. Pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ continue on peut montrer que f est propre si et seulement si $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$

Exercice 4.3.19. On considère une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , telle que

$$\|f(y) - f(x)\| \geq k\|y - x\| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

pour une certaine constante $k > 0$ et une norme quelconque (on dit que f est k -dilatante pour la norme en question). On veut montrer que f est un difféomorphisme global de \mathbb{R}^n sur lui-même.

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est fermée dans \mathbb{R}^n (par exemple en montrant qu'elle est séquentiellement fermée).
3. Montrer que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et en déduire que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est ouverte dans \mathbb{R}^n .
4. Conclure.

Exercice 4.3.20. 1. Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A^2$ est de classe C^1 , et déterminer sa différentielle en tout point.

2. Montrer que toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suffisamment proche de la matrice identité "admet une racine carrée".

Chapitre 5

Extrema liés

Dans tout ce chapitre, on désignera par U un ouvert de \mathbb{R}^n . On va considérer des fonctions f à valeurs réelles

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

et s'intéresser à ses extrema. Dans le Chapitre 3 on s'est intéressé aux extrema dits *libres*, par opposition aux extrema *liés*, ou *sous contrainte*, auxquels on va s'intéresser ici.

5.1 Un exemple/exercice naïf

Dans \mathbb{R}^2 on considère l'ellipse \mathcal{E} d'équation

$$(x - 2)^2 + 2y^2 = 6.$$

On cherche les points de \mathcal{E} les plus proches et les plus éloignés de l'origine $O(0, 0)$. Faites un dessin et "devinez" la réponse.

Formalisons un peu tout cela. On cherche les extrema de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

sous la contrainte $g(x, y) = 0$, où $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$g(x, y) = (x - 2)^2 + 2y^2 - 6.$$

Montrez que \mathcal{E} est compact. En déduire que $\min_{(x,y) \in \mathcal{E}} f(x, y)$ et $\max_{(x,y) \in \mathcal{E}} f(x, y)$ existent bien. On admet alors ce que nous a suggéré le dessin (et qui sera démontré dans la Section 5.2) : s'il y a un extremum lié en (x, y) alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé multiplicateur de Lagrange) tel que

$$\overrightarrow{\text{Grad}} f(x, y) = \lambda \overrightarrow{\text{Grad}} g(x, y).$$

Trouvez les éventuels points d'extrema liés, puis concluez.

5.2 Une contrainte, multiplicateur de Lagrange

On parle d'extremum lié lorsqu'on cherche à maximiser ou minimiser une fonction de plusieurs variables lorsque ces variables sont liées par une relation (ou plusieurs, cf ci-dessous).

Définition 5.2.1 (Extremum lié). Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in U$ tel que $g(a) = 0$.

On dit que a est un point de minimum local de f sous la contrainte g s'il existe un voisinage V de a tel que

$$f(x) \geq f(a), \quad \forall x \in V \cap \Gamma,$$

où l'ensemble $\Gamma := \{x \in U, g(x) = 0\}$ "représente" la contrainte.

On définit évidemment la notion de point de maximum local de f sous la contrainte g par

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in V \cap \Gamma.$$

Théorème 5.2.2 (Multiplicateur de Lagrange). Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Soit $a \in U$ tel que $g(a) = 0$. On suppose que

$$\overrightarrow{\text{Grad}} g(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Si a est un point d'extremum local de f sous la contrainte g alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé multiplicateur de Lagrange) tel que

$$\overrightarrow{\text{Grad}} f(a) = \lambda \overrightarrow{\text{Grad}} g(a).$$

La preuve repose sur le théorème des fonctions implicites.

Exemple 5.2.3. Étudier les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{xy}$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

5.3 Plusieurs contraintes, multiplicateurs de Lagrange

Définition 5.3.1 (Extremum lié). Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et, pour $1 \leq i \leq p$, $g_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in U$ tel que $g_1(a) = \dots = g_p(a) = 0$.

On dit que a est un point de minimum local de f sous les contraintes g_1, \dots, g_p s'il existe un voisinage V de a tel que

$$f(x) \geq f(a), \quad \forall x \in V \cap \Gamma,$$

où l'ensemble $\Gamma := \{x \in U, \forall 1 \leq i \leq p, g_i(x) = 0\}$ "représente" la contrainte.

On définit évidemment la notion de point de maximum local de f sous les contraintes g_1, \dots, g_p par

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in V \cap \Gamma.$$

Théorème 5.3.2 (Multiplicateurs de Lagrange). Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et, pour $1 \leq i \leq p$, $g_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Soit $a \in U$ tel que $g_1(a) = \dots = g_p(a) = 0$. On suppose que (on dit alors que les contraintes g_1, \dots, g_p sont indépendantes au point $a \in U$)

la famille de formes linéaires $\{dg_1(a), \dots, dg_p(a)\}$ est libre.

Si a est un point d'extremum local de f sous les contraintes g_1, \dots, g_p alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tel que

$$df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_p dg_p(a).$$

La preuve repose sur le théorème des fonctions implicites.

Exemple 5.3.3. Montrer que, pour toute famille (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n ,

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|v_i\|_2.$$

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1. Calculer

$$\max_{x^2+y^2+z^2=1} x + y + 2z.$$

Exercice 5.4.2. Trouver les points de la surface $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y^2 = 9 + xz\}$ qui sont les plus proches de l'origine de \mathbb{R}^3 .

Exercice 5.4.3. On donne $a > 0, b > 0, c > 0$. Trouver le volume maximal d'un parallélépipède contenu dans l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Exercice 5.4.4. Soit $n \geq 2$ un entier. On considère $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i.$$

On note

$$\Gamma := \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n, x_1 + \dots + x_n = 1\}.$$

1. Montrer que f admet un maximum global sous la contrainte Γ et calculer ce maximum.
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n$ on a

$$\underbrace{\prod_{i=1}^n x_i^{1/n}}_{\text{moyenne géométrique}} \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}_{\text{moyenne arithmétique}}.$$

Exercice 5.4.5. On considère une matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On sait qu'elle a n valeurs propres réelles que l'on note

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

On considère $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle.$$

On munit \mathbb{R}^n de la norme 2, c'est à dire $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

1. Montrer que les réels $\min_{\|x\|=1} f(x)$ et $\max_{\|x\|=1} f(x)$ sont bien définis. Dans la suite, on note x_{\min} et x_{\max} deux vecteurs de norme 1 tels que

$$\min_{\|x\|=1} f(x) = f(x_{\min}), \quad \max_{\|x\|=1} f(x) = f(x_{\max}).$$

2. Montrer que f est différentiable en tout $x \in \mathbb{R}^n$ et que

$$df_x(h) = 2 \langle Ax, h \rangle, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

3. A l'aide du Théorème 5.2.2, montrer que x_{\min} et x_{\max} sont forcément des vecteurs propres de A .

4. En déduire que

$$\min_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \lambda_1, \quad \max_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \lambda_n.$$

Chapitre 6

Quid en dimension infinie ?...

Jusqu'ici on a, pour simplifier, travaillé en dimension finie. Que se passe-t-il dans le cadre plus général des espaces de Banach (= espace vectoriel normé complet) ? Rappelons que

- (i) tout espace vectoriel de dimension finie est de Banach.
- (ii) si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont 2 Banach alors $\mathcal{L}(E, F)$ (= espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F) muni de la "norme triple" est un Banach.
- (iii) si (X, d) est un espace métrique et $(F, \|\cdot\|_F)$ un Banach alors $C_b^0(X, F)$ muni de la "norme du sup" est un Banach. En particulier, si K est un compact de X , $C^0(K, F)$ est un Banach.

Il s'avère qu'une grande partie des choses présentées dans les chapitres précédents se généralise ! Dans le cadre des espaces de Banach, la composition des différentielles, le théorème des accroissements finis, le théorème de Schwartz, les formules de Taylor, le théorème d'inversion locale, le théorème des fonctions implicites, le théorème sur les extrema liés restent valides (avec parfois une micro modification d'écriture). Donnons quelques détails, exemples et applications.

6.1 Différentiabilité

Le Théorème-Définition 2.1.1 est "inchangé".

Théorème-Définition 6.1.1 (Différentiabilité). *Soit E et F deux espaces de Banach. Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. Soit $a \in U$. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire continue de E dans F , notée df_a ou $df(a)$, telle que*

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{df_a}_{\in \mathcal{L}(E,F)}(h) + o(h) \quad \text{quand } h \rightarrow 0_E.$$

En cas d'existence une telle application linéaire continue df_a est unique. On dit alors que l'application linéaire df_a est tangente à f en a .

Attention, en dimension infinie, il faut *vraiment* s'assurer que l'application linéaire df_a de E dans F est continue (ce n'est pas "gratuit" comme en dimension finie).

Exercice 6.1.2. *Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$ muni de la norme*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Etudier la différentiabilité de φ dans les cas suivants :

1. $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(f) := \sin(f(0))$.
2. $\varphi : E \rightarrow E$, $\varphi(f) := x \mapsto \int_0^x f^2(t)dt$.
3. $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Exercice 6.1.3. On considère les espaces

$$E := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ et vérifiant } f(0) = 0\} \text{ muni de } \|f\|_E := \|f'\|_\infty,$$

et

$$F := C^0([0, 1], \mathbb{R}) \text{ muni de } \|f\|_F = \|f\|_\infty,$$

et l'application

$$\varphi : E \rightarrow F, \quad \varphi(f) := f' + f^2.$$

1. Montrer que $\|f\|_\infty \leq \|f\|_E$ pour tout $f \in E$, que $\|\cdot\|_E$ est une norme et que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un Banach.
2. Montrer que φ est différentiable et calculer sa différentielle.
3. Montrer que φ est de classe C^1 .

6.2 Fonctions implicites en dimension infinie, applications

Voici une version du théorème des fonctions implicites “version Espaces de Banach” tirée de [8, Theorem 4.B].

Théorème 6.2.1 (Théorème des fonctions implicites). *Soit X, Y et Z trois espaces de Banach. On suppose que*

(i) $\mathcal{F} : U \subset X \times Y \rightarrow Z$ est définie sur U voisinage ouvert de $(x_0, y_0) \in X \times Y$ et

$$\mathcal{F}(x_0, y_0) = 0.$$

(ii) dans U , \mathcal{F} admet une dérivée partielle (au sens de Fréchet) par rapport à y et

$$\mathcal{F}_y(x_0, y_0) : Y \rightarrow Z \text{ est bijective.}$$

(iii) \mathcal{F} et \mathcal{F}_y sont continues en (x_0, y_0) .

Alors

1. Existence et unicité. Il existe $r_0 > 0$ et $r > 0$ tels que, pour tout $x \in X$ avec $\|x - x_0\| \leq r_0$, il existe un unique $y(x) \in Y$ tel que $\|y - y_0\| \leq r$ et

$$\mathcal{F}(x, y(x)) = 0.$$

2. Continuité. Si \mathcal{F} est continue sur un voisinage de (x_0, y_0) alors $x \mapsto y(x)$ est continue sur un voisinage de x_0 .
3. Régularité supérieure. Si \mathcal{F} est de classe C^m , $1 \leq m \leq +\infty$, sur un voisinage de (x_0, y_0) , alors $x \mapsto y(x)$ est de classe C^m sur un voisinage de x_0 .

Voici quelques applications pour résoudre des problèmes d'analyse.

Exercice 6.2.2. Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et 1-périodiques normé par

$$\|f\|_E := \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty)$$

qui en fait un espace de Banach. Pour $f \in E$, $\tau \in \mathbb{R}$, on note $f_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\tau(x) := f(x + \tau)$. On se donne $g \in E$ non constante et on définit

$$\mathcal{F} : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, \varepsilon) \mapsto \mathcal{F}(f, \varepsilon) := \int_0^1 f_\varepsilon(x)g'(x)dx.$$

1. Montrer que \mathcal{F} est de classe C^1 et calculer sa différentielle en tout point (f, ε) .
2. Montrer que, au voisinage de $(g, 0)$, l'égalité $\mathcal{F}(f, \varepsilon) = 0$ équivaut à $\varepsilon = \varphi(f)$, où φ est une fonction de classe C^1 .

Exercice 6.2.3. On se donne $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $G : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on cherche $u \in C([0, 1], \mathbb{R})$ solution de l'équation intégrale

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x, t)G(t, u(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mettre tout cela dans un cadre qui permet d'appliquer le Théorème des fonctions implicites 6.2.1 et montrer ainsi que, pour $|\lambda|$ assez petit, le problème admet une unique solution. NB : pour montrer le caractère bijectif de $\mathcal{F}_u(0, 0)$ on utilisera l'alternative de Fredholm, cf Théorème A.3.4.

6.3 Extrema liés en dimension infinie, une application

Voici une version du théorème des extrema liés (avec une contrainte) "version Espaces de Banach".

Théorème 6.3.1 (Multiplicateur de Lagrange). Soit E un espace de Banach. Soient $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Soit $a \in U$ tel que $g(a) = 0$. On suppose que

$$dg(a) : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ est surjective (cad non nulle).}$$

Si a est un point d'extremum local de f sous la contrainte g alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé multiplicateur de Lagrange) tel que

$$df(a) = \lambda dg(a).$$

Une application (peut être détaillée en cours) est la recherche d'éléments propres (principaux) du type

$$\begin{cases} -u'' - r(x)u = \lambda u & \text{dans } (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

ou, plus généralement,

$$\begin{cases} -\Delta u - r(x)u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Chapitre 7

Sous-variétés

Dans ce chapitre E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

7.1 Préliminaires : rang, immersion et submersion

Définition 7.1.1 (Rang). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application différentiable. Pour $a \in U$, le rang de f en a est le rang de l'application linéaire df_a .

Définition 7.1.2 (Immersion). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k ($k \geq 1$). Pour $a \in U$, on dit que f est une immersion C^k en a si df_a est injective. Si f est une immersion C^k en tout $x \in U$, on dit que f est une immersion sur U .

Noter que si une immersion existe alors, nécessairement, $n \leq p$.

Exemple 7.1.3. Si $n \leq p$ alors l'injection canonique de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , définie par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$, est une immersion sur \mathbb{R}^n .

On peut montrer, à l'aide du théorème d'inversion locale, que, à un changement de variables près, toute immersion est localement l'injection canonique de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

Définition 7.1.4 (Submersion). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k ($k \geq 1$). Pour $a \in U$, on dit que f est une submersion C^k en a si df_a est surjective. Si f est une submersion C^k en tout $x \in U$, on dit que f est une submersion sur U .

Noter que si une submersion existe alors, nécessairement, $n \geq p$.

Exemple 7.1.5. Si $n \geq p$ alors la projection canonique de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , définie par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_p)$, est une submersion sur \mathbb{R}^n .

On peut montrer, à l'aide du théorème d'inversion locale, que, à un changement de variables près, toute submersion est localement la projection canonique de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

7.2 Sous-variétés : définitions équivalentes

7.2.1 Par équation locale

Définition 7.2.1 (Sous-variété). On dit qu'un sous-ensemble M de E est une sous-variété C^k de dimension p de E si, pour tout $a \in M$, il existe un voisinage ouvert U de a dans E et une application $f : U \rightarrow F$ de classe C^k (dite équation locale régulière de M au voisinage de a) tels que

- (i) F est un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension $n - p$.
- (ii) Il existe $y_0 \in F$ tel que $U \cap M = {}^{-1}f(\{y_0\})$.
- (iii) f est une submersion en a .

Les sous-variétés de dimension n de E sont les ouverts de E .

Les sous-variétés de dimension 0 de E sont les sous-ensembles dont tous les points sont isolés. Par exemple $M := \{(\frac{1}{k}, 0), k \geq 1\}$ est une sous-variété C^∞ de dimension 0 de \mathbb{R}^2 , mais son adhérence ne l'est pas.

Les sous-variétés de dimension 1, 2, $n-1$ sont respectivement appelées les courbes régulières, les surfaces, les hypersurfaces de E .

Exemple 7.2.2. (i) *La sphère*

$$\mathbb{S}^{n-1} := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

est une hypersurface C^∞ de \mathbb{R}^n .

- (ii) $\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - y^3 = 0\}$ est une courbe régulière C^∞ de \mathbb{R}^2 .
- (iii) $\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$ n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^2 mais $\mathcal{C} \setminus \{(0, 0)\}$ est une courbe régulière C^∞ de \mathbb{R}^2 .
- (iv) *Le groupe spécial linéaire*

$$\mathcal{SL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

est une hypersurface C^∞ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (v) *Le groupe orthogonal*

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^tAA = A{}^tA = I_n\}$$

est une sous-variété C^∞ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (vi) Soit $\varphi : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe C^k . Le graphe de φ

$$G(\varphi) := \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}^m : y = \varphi(x)\}$$

est une sous-variété C^k de dimension p de \mathbb{R}^{p+m} .

7.2.2 Par redressement local

Théorème 7.2.3 (Sous-variété et redressement). *Un sous-ensemble M de E est une sous-variété C^k de dimension p de E si, et seulement si, pour tout $a \in M$, il existe un voisinage ouvert U de a dans E , un voisinage ouvert V de 0 dans \mathbb{R}^n et un C^k -difféomorphisme $\Phi : U \rightarrow V$ tels que $\Phi(a) = 0$ et*

$$\Phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}).$$

Dans ce cas, on dit que Φ est un redressement local de M au voisinage de a .

Exemple 7.2.4. *Construire un redressement local en chacun des points du cercle \mathbb{S}^1 (qui est une courbe régulière C^∞ de \mathbb{R}^2).*

7.2.3 Par graphe local

Théorème 7.2.5 (Sous-variété et graphe). *Un sous-ensemble M de E est une sous-variété C^k de dimension p de E si, et seulement si, pour tout $a \in M$, il existe une décomposition $E = F_1 \oplus F_2$ avec $\dim F_1 = p$, un voisinage ouvert U_i de a_i dans F_i (où $a = a_1 + a_2$ avec $a_i \in F_i$) et une application $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ de classe C^k tels que*

$$M \cap (U_1 \times U_2) = \{(y_1, y_2) \in U_1 \times U_2 : y_2 = \varphi(y_1)\}.$$

Dans ce cas, on dit que M est localement le graphe de φ au voisinage de a .

Exemple 7.2.6. Traiter le cas du cercle \mathbb{S}^1 (qui est une courbe régulière C^∞ de \mathbb{R}^2).

7.2.4 Par paramétrisation locale

Théorème 7.2.7 (Sous-variété et paramétrisation). *Un sous-ensemble M de E est une sous-variété C^k de dimension p de E si, et seulement si, pour tout $a \in M$, il existe un voisinage ouvert U de a dans E , un espace vectoriel F de dimension p , Ω un ouvert de F et une application $g : \Omega \rightarrow E$ tels que g soit un homéomorphisme de classe C^k de Ω sur $U \cap M$ et une immersion en $g^{-1}(a)$. Dans ce cas, on dit que g est une paramétrisation locale de M en a .*

7.3 Espace tangent et fibré tangent

Ici, M désigne une sous-variété C^k de dimension p de E . Pour $a \in M$, on note

$$\mathcal{C}_a M := \{\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M \text{ avec } \varepsilon > 0, \gamma(0) = a, \gamma \text{ dérivable en } 0^+\}$$

qui est donc un “ensemble de courbes”.

Définition 7.3.1 (Tangence). *Un vecteur $v \in E$ est dit tangent à M en a s'il existe $\gamma \in \mathcal{C}_a M$ telle que $\gamma'(0) = v$. On définit l'espace tangent à M en a par*

$$T_a M = \{\gamma'(0), \gamma \in \mathcal{C}_a M\}.$$

Théorème 7.3.2 (Caractérisation de l'espace tangent). *L'ensemble $T_a M$ est un sous espace vectoriel de dimension p de E . De plus on a les caractérisations suivantes.*

(i) *Si $f : U \rightarrow F$ est une équation locale régulière de M au voisinage de a alors $T_a M = \text{Ker } d_a f$. En particulier, si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^{n-p}$, $f = (f_1, \dots, f_{n-p})$ alors*

$$T_a M = (\text{Vect } (\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{n-p}(a)))^\perp.$$

(ii) *Si $\Phi : U \rightarrow V$ est un redressement local de M au voisinage de a alors*

$$T_a M = (d_a \Phi)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\}).$$

(iii) *Si $g : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow E$ est une paramétrisation locale de E en $a = g(y_0)$ alors $T_a M = \text{Im } d_{y_0} g$. En particulier, si (e_1, \dots, e_p) est une base de \mathbb{R}^p alors*

$$T_a M = \text{Vect } (d_a f(e_1), \dots, d_a f(e_p)).$$

Exemple 7.3.3. *On a $T_{I_n} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = T_{I_n} \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices antisymétriques réelles de taille n).*

Définition 7.3.4 (Fibré tangent). *On appelle fibré tangent de M l'ensemble*

$$TM := \coprod_{a \in M} \{a\} \times T_a M = \{(a, v) : a \in M, v \in T_a M\} \subset E \times E.$$

Proposition 7.3.5. *Si M est une sous-variété de classe C^k (avec $k \geq 2$) de dimension p de E alors TM est une sous-variété de classe C^{k-1} et de dimension $2p$ de $E \times E$.*

7.4 Applications différentiables entre sous-variétés

Pour $i = 1, 2$, soit M_i une sous-variété de classe C^k de dimension p_i dans un espace vectoriel E_i de dimension n_i .

Définition 7.4.1 (Différentiabilité). Soit Ω un ouvert de M_1 et $f : \Omega \rightarrow M_2$ une application.

On dit que f est différentiable (resp. de classe C^l) en $a \in \Omega$ s'il existe un voisinage ouvert U de a dans E_1 et $F : U \rightarrow E_2$ différentiable (resp. C^l) au sens usuel en a telle que $F = f$ sur $\Omega \cap U$ (on dit que F est un prolongement local de f au voisinage de a).

On dit que f est différentiable (resp. de classe C^l) sur Ω si elle est différentiable (resp. de classe C^l) en tout point de Ω .

Par convention, les applications entre sous-variétés de classe C^k de E ne peuvent pas être de classe C^l avec $l > k$, même si elles admettent un prolongement local de classe C^∞ .

Exemple 7.4.2. (i) $f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \prod_{i=1}^n x_i \in \mathbb{R}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{S}^{n-1} .

(ii) $Tr : M \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \mapsto Tr M \in \mathbb{R}$ est de classe C^∞ sur $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Définition 7.4.3 (Différentielle). Soit $f : \Omega \subset M_1 \rightarrow M_2$ de classe C^l en $a \in M_1$. On appelle différentielle de f en a l'application, notée $T_a f$, de $T_a M_1$ dans $T_{f(a)} M_2$ définie par

$$T_a f(v) := (f \circ \gamma)'(0),$$

où γ est un chemin de $C_a M_1$ vérifiant $\gamma'(0) = v$.

Proposition 7.4.4. Si $f : \Omega \subset M_1 \rightarrow M_2$ est différentiable en $a \in \Omega$ alors $T_a f : T_a M_1 \rightarrow T_{f(a)} M_2$ est une application linéaire bien définie. De plus, si $F : U \rightarrow E_2$ est un prolongement local de f au voisinage de a alors

$$T_a f = d_a F|_{T_a M_1}.$$

Exercice 7.4.5. (i) Si M est une sous-variété de classe C^k de E , l'application $Id_M : M \rightarrow M$ est de classe C^k et on a $T_a Id_M = Id_{T_a M}$.

(ii) Si M est une sous-variété de classe C^k de E , l'injection ι de M dans E est de classe C^k et $T_a \iota$ est l'injection de $T_a M$ dans E .

(iii) $f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \prod_{i=1}^n x_i \in \mathbb{R}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{S}^{n-1} et

$$T_a f : v \in T_a \mathbb{S}^{n-1} = a^\perp \mapsto \sum_{j=1}^n v_j \prod_{k \neq j} a_k \in \mathbb{R}.$$

Notons enfin, que sous quelques hypothèses sans surprise, on a la formule pour la composée :

$$T_a(g \circ f) = T_{f(a)}g \circ T_a f.$$

7.5 Exercices

Exercice 7.5.1. Pour $0 < r < 1$, montrer que

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right)^2 + z^2 = r^2 \right\}$$

est une sous-variété de \mathbb{R}^3 .

Exercice 7.5.2. Montrer que les lignes de niveau de la fonction f définie par

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2 + (1 - x^2 - y^2)^2}$$

sont des sous-variétés C^∞ de \mathbb{R}^3 et préciser leur dimension.

Exercice 7.5.3. Montrer que

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x = 0 \text{ et } y \geq 0) \text{ ou } (x \geq 0 \text{ et } y = 0)\}$$

n'est pas une sous-variété C^∞ de \mathbb{R}^2 .

Exercice 7.5.4. Pour $n \geq 1$ soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré au plus n .

1. Montrer que l'ensemble E des polynômes ayant une unique racine, avec multiplicité n , est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}_n[X]$ et indiquer sa dimension.
2. Montrer que, si $n \geq 2$, l'adhérence de E n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que la fonction qui associe à un élément de E son unique racine est C^∞ .

Exercice 7.5.5. Soit $n \geq 1$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la "norme 2"

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}.$$

L'objectif de cet exercice est de caractériser le groupe des matrices orthogonales directes

$$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^tMM = I_n \text{ et } \det M = 1\}$$

comme l'ensemble des éléments de

$$\mathcal{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det M = 1\}$$

dont la "norme 2" est minimale.

1. Vérifier que $\|A\|^2 = \text{Tr}({}^tAA)$. En déduire que l'objectif de l'exercice est de montrer que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des minima d'une certaine fonction f (à préciser) sur un certain ensemble (à préciser).
2. Vérifier que la fonction f précédemment introduite atteint son minimum sur $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$, on a

$$d_A \det(H) = \text{Tr}({}^tCH)$$

où C est la comatrice de A .

4. En déduire que $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension.
5. En utilisant le théorème des extrema liés, vérifier que si A est un minimum de f sur $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$2\text{Tr}({}^tAH) = \lambda \text{Tr}({}^tCH)$$

pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que $A = C$, puis que $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

6. Conclure.

Deuxième partie

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Chapitre 8

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Avertissement : jusqu'ici, en analyse, la variable était très souvent notée x et une fonction était très souvent notée f . On va maintenant s'intéresser à des équations différentielles où l'inconnue est une fonction qui doit vérifier une certaine égalité reliant la fonction et certaines de ses dérivées. Ces équations modélisent très souvent des phénomènes biologiques ou physiques et la variable sera donc notée t (le temps); quant à la fonction inconnue elle sera très souvent notée x si elle a valeurs réelles ($x(t)$ représente une grandeur physique, par exemple l'abscisse d'un mobile, ou un nombre d'individus en dynamique des populations... etc), ou X si elle est à valeurs dans \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ (par exemple $X(t) = (x(t), y(t))$ où $x(t)$ et $y(t)$ représentent un nombre d'individus de deux espèces en compétition, ou des proies et des prédateurs...). L'équation différentielle est souvent accompagnée d'une donnée initiale, c'est à dire la valeur de la fonction inconnue au temps initial (disons $t = 0$).

8.1 Des équations différentielles pour modéliser

Dynamique d'une population

Au temps t on note $x(t)$ la taille d'une population. On suppose que, entre le temps t et le temps $t + dt$, l'accroissement de la population est proportionnel au temps écoulé dt et à $f(x(t))$, où f est une fonction de croissance. On a donc

$$x(t + dt) = x(t) + f(x(t))dt,$$

soit

$$\frac{x(t + dt) - x(t)}{dt} = f(x(t)).$$

En faisant $dt \rightarrow 0$, on obtient l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$x'(t) = f(x(t)).$$

En adjoignant une condition initiale, on obtient

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 > 0 \text{ donné} \end{cases}$$

qu'on appelle problème de Cauchy (=1 EDO +1 condition initiale).

Exemple 8.1.1 (EDO linéaire autonome). *Croissance linéaire* $f(x) = rx$ avec r constante réelle. En anticipant un peu

$$\text{la solution du pb de Cauchy } \begin{cases} x' = rx \\ x(0) = x_0 > 0 \text{ donné} \end{cases} \text{ est } x(t) = x_0 e^{rt}.$$

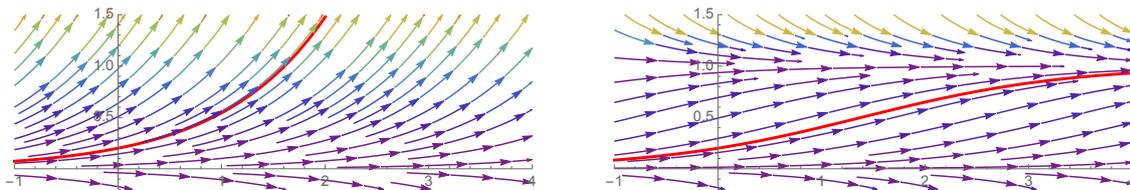


FIGURE 8.1 – A gauche : $x' = x$, en rouge la condition initiale $x(0) = 0.2$, cf Exemple 8.1.1. A droite : $x' = x(1 - x)$, en rouge la condition initiale $x(0) = 0.2$, cf Exemple 8.1.2.

Si $r < 0$, $x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ (extinction), cf Figure 8.1 gauche. En revanche si $r > 0$, $x(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ (explosion).

Noter que, si $r > 0$, le seul zéro de la fonction de croissance linéaire est zéro. Noter aussi que, si $r > 0$, la fonction de croissance linéaire n'est pas majorée sur $[0, +\infty[$ signifiant que les ressources pour cette population sont illimitées. Cela n'est pas très réaliste et conduit à l'explosion.

Exemple 8.1.2 (EDO non linéaire autonome). *Croissance logistique* $f(x) = rx(1 - x)$ avec $r > 0$ constante donnée. En anticipant un peu

$$\text{la solution du pb de Cauchy } \begin{cases} x' = rx(1 - x) \\ x(0) = x_0 > 0 \text{ donné} \end{cases} \text{ est } x(t) = \frac{x_0 e^{rt}}{1 - x_0 + x_0 e^{rt}}.$$

On a $x(t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow +\infty$ (survie avec saturation), cf Figure 8.1 droite. 1 est la capacité biotique (normalisée) de la population.

A noter que la fonction de croissance logistique est proche de rx lorsque x est voisin de zéro mais, quand x grandit, le terme $(1 - x)$ agit comme une pénalisation, modélisant la compétition entre les individus pour les ressources disponibles. Noter enfin que $f(0) = 0$ mais aussi $f(1) = 0$...

Enfin, on peut imaginer que le taux de croissance ou la force de la compétition sont des grandeurs qui dépendent du temps (par exemple de manière périodique pour modéliser les saisons).

Exemple 8.1.3 (EDO non autonomes). *Voici quelques modèles linéaires avec coefficients dépendant du temps*

$$x' = (2 + \cos t)x, \quad x' = (1 + t^2)x, \quad x' = 3x + b(t),$$

et quelques modèles non linéaires avec coefficients dépendant du temps

$$x' = (2 + \cos t)x(1 - x), \quad x' = x(1 - (2 + \cos t)x)$$

qu'on discutera en cours.

Dynamique de deux populations

On considère ici deux populations mesurées par $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \geq 0$. On va écrire trois systèmes différentiels non linéaires pour trois situations différentes.

Exemple 8.1.4. Ici $x(t)$ est une proie (des lièvres par ex.) et $y(t)$ son prédateur (des lynx par ex.). On peut modéliser cela par le système de Lotka-Volterra (normalisé) :

$$\begin{cases} x' = x(1 - y) \\ y' = ry(-1 + x) \end{cases} \quad \text{PROIE-PREDATEUR}$$

où $r > 0$ est une constante. En l'absence de prédateurs, les proies croissent linéairement ; le terme NON LINEAIRE $-xy$ représente la prédation (négative pour les proies !). En l'absence de proies, les prédateurs décroissent linéairement ; le terme NON LINEAIRE $+rxy$ représente la prédation (positive pour les prédateurs !).

Exemple 8.1.5. Ici $x(t)$ et $y(t)$ sont deux populations (homme de Néandertal contre Homo sapiens ; écureuils invasifs contre écureuils indigènes...) et en compétition pour les ressources (la nourriture...). On peut modéliser cela par le système (normalisé) :

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \alpha y) \\ y' = ry(1 - y - \beta x) \end{cases} \quad \text{COMPETITION}$$

où $\alpha > 0$, $r > 0$ et $\beta > 0$ sont des constantes. En l'absence de l'autre population, chaque population croît de manière logistique (termes $x(1-x)$ et $ry(1-y)$). De plus, par compétition, $x(t)$ "freine" $y(t)$ (terme $-\beta x$ dans la parenthèse) et $y(t)$ "freine" $x(t)$ (terme $-\alpha y$ dans la parenthèse). La question est "quelqu'un gagne t il la compétition ? si oui qui ?"...

Exemple 8.1.6. Ici $x(t)$ et $y(t)$ sont deux populations qui s'entraident (termites et microorganismes digérant la cellulose, crocodiles et pluvians du Nil...). On peut modéliser cela par le système (normalisé) :

$$\begin{cases} x' = x(1 - x + \alpha y) \\ y' = ry(1 - y + \beta x) \end{cases} \quad \text{SYMBIOSE, MUTUALISME}$$

où $\alpha > 0$, $r > 0$ et $\beta > 0$ sont des constantes. En l'absence de l'autre population, chaque population croît de manière logistique (termes $x(1-x)$ et $ry(1-y)$). De plus, par symbiose, $x(t)$ "aide" $y(t)$ (terme $+\beta x$ dans la parenthèse) et $y(t)$ "aide" $x(t)$ (terme $+\alpha y$ dans la parenthèse).

Les trois systèmes non linéaires ci dessus sont autonomes mais on peut évidemment imaginer que certains coefficients (un taux de croissance ou un taux de compétition par exemple) dépendent du temps...

Notons qu'une écriture "unifiée" pour les EDO rencontrées jusqu'à présent est

$$X' = f(t, X), \quad (8.1)$$

où X est la fonction inconnue, de la variable réelle t , à valeurs dans \mathbb{R}^n (par ex. pour une population $n = 1$ et on note alors plutôt x , mais pour deux populations $n = 2$ et on note $X = (x, y)...$), et f une fonction de la variable temporelle t et de la variable d'état X . Si f ne dépend pas de t alors l'EDO

$$X' = f(X)$$

est dite autonome.

En physique

On peut évidemment rencontrer des EDO où interviennent les dérivées d'ordre supérieur de la fonction inconnue. Par exemple, en mécanique, si $x(t)$ mesure la position d'un mobile alors la relation fondamentale de la dynamique conduit à des EDO où intervient l'accélération qui n'est autre que $x''(t)$.

Exemple 8.1.7. (EDO linéaire autonome) Si on accroche une masse $m > 0$ (assimilée à un point) à un ressort de raideur $k > 0$, alors la position $x(t)$ de la masse est régie par l'EDO du second ordre

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0,$$

qui devient un problème de Cauchy si on adjoint la position initiale $x(0)$ ET la vitesse initiale $x'(0)$. Si $x(0) = x'(0) = 0$ il ne se passe rien, sinon ça "oscille"...

Exemple 8.1.8. (EDO non linéaire autonome) L'équation du pendule simple est

$$\theta'' + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0,$$

qui devient un problème de Cauchy si on adjoint l'angle initial $\theta(0)$ ET la vitesse angulaire initiale $\theta'(0)$.

Evidemment on peut aussi avoir des coefficients qui dépendent du temps.

Notons enfin que les deux exemples ci dessus sont des "EDO du second degré avec inconnue à valeurs réelles" mais qu'on peut (cf cours) les écrire comme des "EDO du premier ordre avec inconnue à valeurs dans \mathbb{R}^2 ".

Ainsi, quitte à payer sur la taille de la solution, on pourra toujours abaisser le degré d'une EDO pour la mettre sous la forme (8.1), forme pour laquelle nous avons maintenant besoin d'une théorie...

8.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

On se donne donc un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$). On se donne une fonction

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

On s'intéresse à l'EDO

$$X' = f(t, X). \quad (8.2)$$

Une solution de l'EDO (8.2) est un COUPLE (J, X) où $J \subset I$ est un intervalle (d'intérieur non vide) ET $X : J \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable telle que, pour tout $t \in J$ on a $X'(t) = f(t, X(t))$ (noter l'aspect local).

Définition 8.2.1. Soient (J_1, X_1) et (J_2, X_2) deux solutions. On dit que (J_2, X_2) est un prolongement de (J_1, X_1) si

$$J_1 \subset J_2 \text{ et } X_1 = X_2 \text{ sur } J_1.$$

On dit que (J, X) est une solution maximale si elle n'est pas (strictement) prolongeable.

On dit que (J, X) est une solution globale si $J = I$.

Pour $t_0 \in I$ et $X_0 \in \Omega$, on s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \quad (8.3)$$

Une solution du problème de Cauchy (8.3) est un COUPLE (J, X) où $J \subset I$ est un intervalle (d'intérieur non vide) contenant t_0 ET $X : J \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable telle que, pour tout $t \in J$ on ait $X'(t) = f(t, X(t))$ (noter l'aspect local) et $X(t_0) = X_0$.

Définition 8.2.2. Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$, avec I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$), et $p \geq 1$.

On dit que f est lipschitzienne par rapport à la variable d'état X sur $I \times \Omega$ si on peut trouver un réel $k \geq 0$ tel que

$$\|f(t, X_1) - f(t, X_2)\| \leq k\|X_1 - X_2\|, \quad \forall t \in I, \forall (X_1, X_2) \in \Omega^2.$$

On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à la variable X sur $I \times \Omega$ si pour tout point (t_0, X_0) dans $I \times \Omega$ on peut trouver un voisinage de ce point tel que f soit lipschitzienne par rapport à la variable X sur ce voisinage : pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \Omega$, il existe $\varepsilon = \varepsilon_{t_0, X_0} > 0$ et $k = k_{t_0, X_0} \geq 0$ tels que

$$\|f(t, X_1) - f(t, X_2)\| \leq k\|X_1 - X_2\|, \quad \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[, \forall (X_1, X_2) \in B(X_0, \varepsilon).$$

Exemple 8.2.3. Quid de $x \mapsto x$ sur \mathbb{R} ? $x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R} ? $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ (qui certes n'est pas ouvert) ? $(t, x) \mapsto tx$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$? $(t, x) \mapsto t^2 + \arctan x$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

Exemple 8.2.4. Si f est de classe C^1 sur $I \times \Omega$ alors elle est localement lipschitzienne par rapport à X .

Voici le résultat fondamental concernant l'existence et l'unicité de la solution maximale du problème de Cauchy (8.3).

Théorème 8.2.5 (de Cauchy-Lipschitz). Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Soit $t_0 \in I$. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $X_0 \in \Omega$. Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à X sur $I \times \Omega$.

Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale (J, X) , et J est un intervalle ouvert. De plus, cette solution est de classe C^1 sur J .

Preuve. La preuve repose sur la mise du problème de Cauchy sous forme intégrale, et se fait en trois temps : les Lemmes 8.2.6, 8.2.7, 8.2.8.

Lemme 8.2.6 (Existence locale). Il existe $\varepsilon > 0$ et $X : \underbrace{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}_{=: J} \rightarrow \Omega$ tel que (J, X) est solution de problème de Cauchy.

Lemme 8.2.7 (Unicité locale). Si (\tilde{J}, \tilde{X}) est une autre solution du problème de Cauchy, alors il existe $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ tel que $\tilde{X} \equiv X$ sur $]t_0 - \tilde{\varepsilon}, t_0 + \tilde{\varepsilon}[$.

Lemme 8.2.8 (Unicité, du local vers le maximal). Si (J_1, X_1) et (J_2, X_2) sont deux solutions du problème de Cauchy avec J_1 et J_2 ouverts, alors $X_1 \equiv X_2$ sur $J_1 \cap J_2$.

La conclusion se fait ainsi : grâce aux Lemmes 8.2.6 et 8.2.7 on peut, en "recollant" toutes les solutions locales, construire une solution maximale (J^*, X^*) qui prolonge toutes les solutions locales. De plus, J^* est forcément ouvert (sinon on peut, grâce aux Lemmes 8.2.6 et 8.2.7, prolonger strictement (J^*, X^*) niant ainsi son caractère maximal). Enfin, l'unicité de la solution maximale est fournie par le Lemme 8.2.8. \square

Le Lemme 8.2.7 est une conséquence assez directe du Lemme de Grönwall qui, supposant une estimation implicite dite *a priori*, fournit une estimation explicite.

Lemme 8.2.9 (Lemme de Grönwall). *Soit $\varphi : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et à valeurs positives. Si $x : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifie, pour une constante $C \geq 0$,*

$$x(t) \leq C + \int_a^t \varphi(s)x(s)ds, \quad \forall a \leq t < b,$$

alors

$$x(t) \leq Ce^{\int_a^t \varphi(s)ds}, \quad \forall a \leq t < b.$$

8.3 Premières conséquences

On se place ici sous les hypothèses du Théorème 8.2.5 de Cauchy Lipschitz qui implique, entre autres, que :

- une solution maximale est définie sur un intervalle ouvert.
- deux trajectoires distinctes ne peuvent pas se couper (cf Figure 8.1) : si (J, X_1) et (J, X_2) sont deux solutions de l'EDO (8.2) et s'il existe $t_0 \in J$ tel que $X_1(t_0) = X_2(t_0)$ alors $X_1 = X_2$ sur J .
- dans \mathbb{R} (ici $n = 1$) les trajectoires sont ordonnées (cf Figure 8.1) : si (J, x_1) et (J, x_2) sont deux solutions de l'EDO (8.2) et s'il existe $t_0 \in J$ tel que $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ alors $x_1(t) < x_2(t)$ pour tout $t \in J$.

On peut ainsi justifier certains calculs formels faits en Section 8.1. Par exemple, prenons une équation autonome

$$x' = f(x),$$

avec $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $l \in \Omega$ est un zéro de f , cad $f(l) = 0$, alors la fonction constante égale à l est une solution globale de l'EDO $x' = f(x)$, on dit que l est un équilibre de l'EDO. Par suite la solution maximale du problème de Cauchy avec donnée initiale différente de l ne prendra jamais la valeur l .

Exemple 8.3.1. *La solution maximale du problème de Cauchy $x' = x$, $x(0) = x_0$ avec $x_0 \neq 0$ ne s'annule jamais. On peut donc écrire $\frac{x'}{x} = 1$ puis intégrer...*

Exemple 8.3.2. *La solution maximale du problème de Cauchy $x' = x(1-x)$, $x(0) = x_0$ avec $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq 1$ ne s'annule jamais et ne vaut jamais 1. On peut donc écrire $\frac{x'}{x(1-x)} = 1$ puis intégrer...*

Le Théorème 8.2.5 de Cauchy Lipschitz permet également de donner des propriétés de la solution maximale.

Exemple 8.3.3. *Pour $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localement lipschitzienne sur \mathbb{R} , montrer que la solution maximale du problème de Cauchy $x' = tg(x)$, $x(0) = 1$ est définie sur un intervalle J symétrique par rapport à zéro, et qu'elle est paire.*

8.4 Explosion en temps fini

Le Théorème 8.2.5 de Cauchy Lipschitz fournit une solution maximale définie sur $J \subset I$ et est donc un résultat *local* : rien n'indique que la solution maximale est *globale*.

Exemple 8.4.1 (Solution non globale). *La solution maximale du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

se calcule, $x(t) = \frac{1}{1-t}$, et n'est définie que sur $] -\infty, 1[$. On a explosion en temps fini : $x(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow 1^-$, cf Figure 8.2.

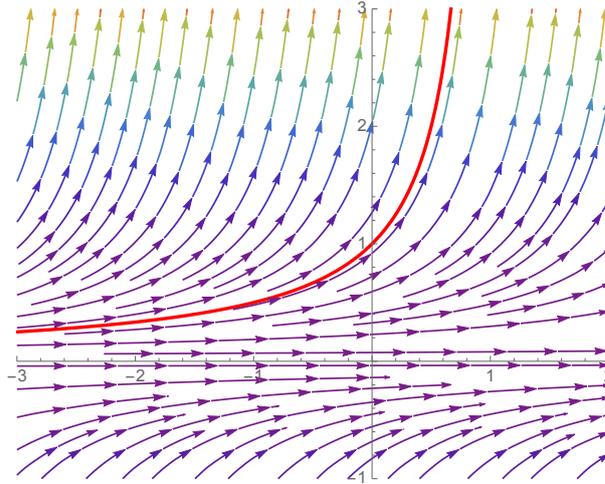


FIGURE 8.2 – $x' = x^2$, en rouge la condition initiale $x(0) = 1$, cf Exemple 8.4.1.

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$ la situation de l'exemple ci dessus est “générique”.

Théorème 8.4.2 (Explosion en temps fini). *Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état X . Soit $(J =]\alpha, \beta[, X)$ une solution maximale de $X' = f(t, X)$. Alors*

1. *si $\beta < \sup I$ alors $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \|X(t)\| = +\infty$.*
2. *si $\inf I < \alpha$ alors $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \|X(t)\| = +\infty$.*

Par contraposée, le Théorème 8.4.2 nous dit parfois que la solution maximale est globale : par exemple si f est bornée $I \times \mathbb{R}^n$, cf Exercice 8.5.7.

Exemple 8.4.3. *Soit le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = e^{-tx} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Sa solution maximale x est définie sur un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ contenant 0. Supposons $\beta < +\infty$ et montrons qu'on peut prolonger au delà de β . Déjà $x' = e^{-tx} > 0$ donc x est croissante sur $]\alpha, \beta[$. Comme $x(0) = 0$, x est positive sur $[0, \beta[$. Par suite $x' = e^{-tx} \leq 1$ donc, par intégration $x(t) \leq t$, tout ceci sur $[0, \beta[$. Ainsi x est croissante et majorée (par β) sur $[0, \beta[$, ce qui contredit le Théorème 8.4.2 d'explosion en temps fini. Par suite $\beta = +\infty$. De la même façon, $\alpha = -\infty$ et la solution maximale est définie sur \mathbb{R} .

Théorème 8.4.4 (de Cauchy Lipschitz global). *Si $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et (globalement) lipschitzienne par rapport à X , alors les solutions maximales de $X' = f(t, X)$ sont globales.*

Signalons enfin que, lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ la notion d'explosion en temps fini est remplacée par la notion de “sortie de tout compact en temps fini”.

Théorème 8.4.5 (Sortie de tout compact). *Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état X . Soit $(J =]\alpha, \beta[, X)$ une solution maximale de $X' = f(t, X)$. Alors*

1. si $\beta < \sup I$ alors X sort de tout compact de Ω au voisinage de β : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$X(t) \notin K, \forall t \in]\beta - \varepsilon, \beta[.$$

2. si $\inf I < \alpha$ alors conclusion "similaire".

Exemple 8.4.6. Application au problème de Cauchy $x' = -\frac{1}{x}$, $x(0) = 1$.

8.5 Exercices

Des cas où on peut calculer...

Exercice 8.5.1. Calculer la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 8.5.2. Trouver la solution maximale des problèmes suivants

$$\begin{cases} x' = 3t^2 x^2 \\ x(1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 3t^2 x^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 8.5.3. Résoudre sur un intervalle à préciser

$$\begin{cases} xx' = \frac{1}{2} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 8.5.4. Justifier que la solution maximale de

$$\begin{cases} x' = |x| \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

ne peut s'annuler, puis la trouver.

Exercice 8.5.5. On considère le modèle de population de Gompertz, dans lequel l'évolution de la population $N(t)$ considérée est décrite par l'équation $N'(t) = rN(t) \ln N(t)$, où r est une constante donnée. Donner une expression de la population en fonction de la population initiale $N(0) = N_0 > 0$.

Exercice 8.5.6. Montrer que, pour tout $\alpha \geq 0$, la fonction

$$x_\alpha(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t < \alpha \\ (t - \alpha)^2 & \text{si } t \geq \alpha, \end{cases}$$

est solution globale d'un même problème de Cauchy. Pourquoi n'est ce pas en contradiction avec le Théorème 8.2.5 de Cauchy-Lipschitz ?

Etudes qualitatives

Exercice 8.5.7. Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ et localement lipschitzienne par rapport à X . On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

On suppose que f est bornée sur $I \times \mathbb{R}^n$. Montrer alors que la solution maximale est globale, c'est-à-dire définie sur I tout entier (raisonner par l'absurde, utiliser la formulation intégrale, et conclure grâce au théorème d'explosion en temps fini).

Exercice 8.5.8. Montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t^2+1} e^{-x^2 \sin^2 t} \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

admet une unique solution maximale, puis que celle-ci est définie sur \mathbb{R} tout entier (utiliser l'Exercice 8.5.7). Montrer que, lorsque $t \rightarrow +\infty$, $x(t)$ tend vers un réel l , et que $1 \leq l \leq 1 + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 8.5.9. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = t^2 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale x .
2. Montrer que x est une fonction impaire et de classe C^∞ .
3. Étudier la monotonie et la convexité de x .
4. On suppose x définie sur $[0, +\infty[$. Montrer que $\frac{x'(t)}{1+x^2(t)} \geq 1$ pour tout $t \geq 1$. Montrer, en intégrant, que c'est impossible. En déduire que x est définie sur un intervalle borné de \mathbb{R} .
5. Dresser le tableau de variation de x .

Exercice 8.5.10. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \cos(tx) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale x .
2. En observant que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \cos(sx(s)) ds$$

montrer que x est définie sur \mathbb{R} entier.

Exercice 8.5.11. On prend $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ de classe C^1 sur \mathbb{R} et on suppose que $\frac{1}{f} \in L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f(u)} du < +\infty.$$

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ donné montrer que la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

est définie sur $] -T_{\min}, T_{\max}[$ avec T_{\min} et T_{\max} deux réels positifs à préciser (en fonction de la non linéarité f et de la donnée initiale x_0). Donner des exemples d'application.

Exercice 8.5.12 (Variation sur les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz). Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (la première variable représente le temps, mais U n'est pas nécessairement le produit d'un intervalle par un ouvert) et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 . Soit $(t_0, x_0) \in U$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et une fonction dérivable $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que
 - (a) $\varphi(t_0) = X_0$,
 - (b) $\forall t \in I, (t, \varphi(t)) \in U$,
 - (c) $\forall t \in I, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.
2. Soit J un autre intervalle ouvert contenant t_0 et $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, dérivable, vérifiant les trois conditions de la question précédente. Montrer que $\varphi|_{I \cap J} = \psi|_{I \cap J}$ (on pourra considérer t_1 , le plus grand $t \geq t_0$ dans $I \cap J$ tel que $\varphi(t) = \psi(t)$ et appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz "usuel" au voisinage de ce point).
3. En déduire que le problème de Cauchy possède une unique solution maximale.

Exercice 8.5.13. On considère la fonction $(t, x) \mapsto \frac{1}{1+tx}$ définie sur l'ouvert

$$U = \{(t, x), tx \neq -1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. En utilisant l'exercice précédent, montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{1+tx} \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

possède une solution maximale unique x .

2. Montrer que cette solution x est impaire et croissante.
3. Montrer, en considérant $\int_0^t x'(s)ds$, que x est définie sur \mathbb{R} entier.
4. Justifier l'existence d'une limite $l = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$, où $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
5. Montrer, en considérant $\int_0^t x'(s)ds$, que $l = +\infty$.

Exercice 8.5.14. On considère l'EDO

$$(E) : \quad x' = t + x^2$$

1. Quel est le lieu des points où les solutions de (E) présentent une tangente horizontale ?
2. Décrire le lieu des points d'inflexion.

Exercice 8.5.15. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad tx' = t + x^2 \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

1. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe une unique fonction x définie sur un intervalle $J =]\alpha, \beta[\subset]0, +\infty[$ contenant 1, solution maximale de l'équation différentielle (E) et vérifiant $x(1) = x_1$.
2. Montrer que,

$$\forall t \in [1, \beta[, \quad \frac{x'(t)}{1+x(t)^2} \geq \frac{1}{t}.$$

Montrer, en intégrant cette inégalité, que $\beta < +\infty$.

3. Étudier le comportement d'une solution maximale aux bornes de l'intervalle $] \alpha, \beta [$. On distinguera les possibilités $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.

9.2 L'espace affine des solutions

A l'équation

$$(E) : X' = \mathcal{A}(t)X + B(t),$$

on associe l'équation dite homogène

$$(H) : X' = \mathcal{A}(t)X.$$

Alors

1. L'ensemble des solutions de (H) est un sous espace vectoriel de dimension n de $C^1(I)$. Pour le déterminer, il nous faut donc n solutions V_1, \dots, V_n linéairement indépendantes.
2. On cherche *une* solution Z de (E) ; on parle d'une solution particulière de (E) . Dans les cas les plus favorables, on "voit" une solution particulière évidente; sinon on peut utiliser la méthode de variation des constantes...
3. **Les solutions de l'équation (E) sont alors obtenues en sommant les solutions de l'équation homogène (H) et la solution particulière Z trouvée.**
4. Enfin, si on cherche à résoudre le problème de Cauchy (9.1), il faut, parmi toutes les solutions de (E) obtenues au point 3., sélectionner celle qui vérifie la condition initiale $X(t_0) = X_0$, en ajustant les n constantes qui étaient "libres".

Exemple 9.2.1. *Résoudre le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = tx - t \\ x(0) = 3. \end{cases}$$

Il faut bien comprendre que tout cela est "théorique" car, en général, dès le point 1. on ne sait pas trouver les V_1, \dots, V_n !!!!

Il y a cependant quelques cas favorables que nous étudions en détails ci-dessous.

9.3 Equations linéaires scalaires ($n = 1$)

On se place ici dans le cadre des fonctions à valeurs réelles, cad $n = 1$, et on utilise les notations $\mathcal{A}(t) = a(t)$, $B(t) = b(t)$ et $X(t) = x(t)$.

9.3.1 Ordre 1

On rappelle ici comment on résout l'équation différentielle du premier ordre

$$(E) : x' = a(t)x + b(t),$$

où $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont continus.

1. Les solutions de l'équation homogène

$$(H) : x' = a(t)x$$

sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ où A est une primitive de a sur I et λ un réel arbitraire.

2. Si on n'a pas de solution particulière évidente de (E) alors on en cherche une sous la forme

$$z(t) = \lambda(t)e^{A(t)} \quad (\text{méthode de variation de la constante}).$$

En traduisant que z est solution particulière on obtient $\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$ et on choisit donc $\lambda(t) = \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds$. Une solution particulière est donc donnée par

$$z(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds.$$

3. Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est arbitraire.

4. Si on veut résoudre le problème de Cauchy avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ on doit avoir $\lambda = e^{-A(t_0)}x_0$ et la solution est donc

$$t \mapsto x_0 e^{A(t)-A(t_0)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds.$$

Exemple 9.3.1. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{t}x \\ x(1) = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -\frac{t^2+1}{t}x \\ x(1) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{t}{t^2-1}x + 1 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

9.3.2 Ordre 2

On cherche ici à résoudre l'EDO linéaire du second ordre

$$(E) : x'' + u(t)x' + v(t)x = w(t),$$

où $u, v, w : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues.

Souvenons nous qu'en posant $y(t) = x'(t)$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ on ramène l'équation différentielle scalaire du second ordre (E) à l'équation linéaire du premier ordre (en payant sur la taille de la solution, maintenant égale à 2)

$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -v(t) & -u(t) \end{pmatrix}}_{=A(t)} X + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ w(t) \end{pmatrix}}_{=B(t)},$$

et on sait que le Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire s'applique. Notons encore que pour faire de (E) un problème de Cauchy, il faut imposer la valeur de x ET de x' en un point $t_0 \in I$, soit

$$\begin{cases} x'' + u(t)x' + v(t)x = w(t) \\ x(t_0) \text{ donné} \\ x'(t_0) \text{ donné.} \end{cases}$$

1. Equation homogène (H) : $x'' + u(t)x' + v(t)x = 0$

Les solutions de l'équation homogène

$$(H) : x'' + u(t)x' + v(t)x = 0,$$

forment un espace vectoriel de dimension 2. Autrement dit si h_1 et h_2 sont deux solutions linéairement indépendantes alors toutes les solutions sont de la forme $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$ avec λ_1 et λ_2 des réels arbitraires. En général on n'est pas capables de déterminer h_1 et h_2 ... Citons cependant 2 cas favorables :

• **L'équation est à coefficients constants :**

$$(H) : x'' + ux' + vx = 0,$$

avec u et v deux réels donnés. L'équation caractéristique associée est :

$$P(r) = r^2 + ur + v = 0.$$

Notons Δ son discriminant. On a les trois cas :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes notées r_1 et r_2 . Les solutions de (H) sont alors les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},$$

où λ_1, λ_2 sont deux constantes réelles.

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique a une racine réelle double notée r_0 . Les solutions de (H) sont alors les fonctions de la forme

$$t \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{r_0 t},$$

où λ_1, λ_2 sont deux constantes réelles.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines complexes distinctes et conjuguées, disons $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, avec α et β réels. Les solutions de (H) sont alors les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{\alpha t} (\lambda_1 \cos \beta t + \lambda_2 \sin \beta t),$$

où λ_1, λ_2 sont deux constantes réelles.

Exemple 9.3.2. Résoudre $x'' + 2x' - 3x = 0$, $x'' + 2x' + x = 0$, $x'' - 2x' + 2x = 0$.

• **On a la chance de connaître une solution h de (H)** car elle est évidente ou car on a travaillé avec des séries entières ou car je ne sais quoi... Alors la technique est la suivante : on cherche une deuxième solution sous la forme $x = zh$. En injectant dans l'équation on obtient que x est solution de (H) si z' est solution d'une équation différentielle scalaire du premier ordre. On résout cette équation pour déterminer z' puis, par intégration, on détermine z ; ainsi on dispose d'une deuxième solution $x = zh$ et donc de notre base de l'espace des solutions.

Exemple 9.3.3. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $x'' - x' + \frac{1}{t}x = 0$. On remarque que $h_1 : t \mapsto t$ est solution évidente. On pose $x(t) = tz(t)$. On obtient $x'' - x' + \frac{1}{t}x = tz'' + (2-t)z'$. Par résolution de l'équation $tv' + (2-t)v = 0$ on obtient $z'(t) = \frac{e^t}{t^2}$; on choisit donc $z(t) = \int_1^t \frac{e^u}{u^2} du$. Ainsi on a une deuxième solution $h_2 : t \mapsto t \int_1^t \frac{e^u}{u^2} du$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda_1 t + \lambda_2 t \int_1^t \frac{e^u}{u^2} du$.

2. Solution particulière de (E) : $x'' + u(t)x' + v(t)x = w(t)$

Comme d'habitude si on a une solution particulière évidente on s'en saisit ! Sinon on en cherche une sous la forme $z = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$ où λ_1 et λ_2 ne sont plus des constantes mais des fonctions. On IMPOSE la condition $\lambda_1' h_1 + \lambda_2' h_2 = 0$. Dans ces conditions on obtient que z est solution si $\lambda_1' h_1' + \lambda_2' h_2' = w$. En résolvant le système

$$\begin{cases} h_1 \lambda_1' + h_2 \lambda_2' = 0 \\ h_1' \lambda_1 + h_2' \lambda_2 = w, \end{cases}$$

on détermine (λ_1', λ_2') puis, après intégration, (λ_1, λ_2) ce qui donne donc la solution particulière $z = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$.

Exemple 9.3.4. Résolvons sur $]0, +\infty[$ l'équation (E) : $t^2 x'' - 2tx' + 2x = 2 + 2t^3 \sin t$.

On remarque que $h_1 : t \mapsto t$ et $h_2 : t \mapsto t^2$ sont 2 solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène dont les solutions sont donc de la forme $t \mapsto \alpha t + \beta t^2$, avec α et β des réels arbitraires.

Cherchons une solution particulière à (E) sous la forme

$$z(t) = \alpha(t)t + \beta(t)t^2.$$

On aboutit alors au système

$$\begin{cases} t\alpha'(t) + t^2\beta'(t) = 0 \\ \alpha'(t) + 2t\beta'(t) = \frac{2}{t^2} + 2t \sin t. \end{cases}$$

Sa résolution conduit à $\alpha'(t) = -\frac{2}{t^2} - 2t \sin t$ et $\beta'(t) = \frac{2}{t^3} + 2 \sin t$. En primitivant (besoin d'une IPP pour α) on a $\alpha(t) = \frac{2}{t} - 2 \sin t + 2t \cos t$ et $\beta(t) = -\frac{1}{t^2} - 2 \cos t$, d'où une solution particulière donnée par $x_0(t) = (\frac{2}{t} - 2 \sin t + 2t \cos t)t + (-\frac{1}{t^2} - 2 \cos t)t^2 = 1 - 2t \sin t$.

Bilan : les solutions sont données par

$$x(t) = \alpha t + \beta t^2 + 1 - 2t \sin t.$$

Remarque 9.3.5. Lorsque l'équation est à coefficients constants et que le second membre est "sympathique", on sait sous quelle forme chercher une solution particulière. Ainsi, face à

$$(E) : ax'' + bx' + cx = d(t),$$

avec $a \neq 0$, b et c des réels donnés, on note $P(r) = ar^2 + br + c$ et le tableau suivant (qu'il ne faut pas apprendre !) nous indique sous quelle forme chercher une solution particulière.

Second membre $d(t)$	Solution particulière
Polynôme de degré q ET $c \neq 0$	polynôme de degré q
Polynôme de degré q ET $c = 0$	polynôme de degré $q + 1$
$Ae^{\alpha t}$ ET α non racine de P	$Ce^{\alpha t}$
$Ae^{\alpha t}$ ET α racine simple de P	$Cte^{\alpha t}$
$Ae^{\alpha t}$ ET α racine double de P	$Ct^2 e^{\alpha t}$
$A \cos(mt) + B \sin(mt)$ ET im non racine de P	$C \cos(mt) + D \sin(mt)$
$A \cos(mt) + B \sin(mt)$ ET im racine de P	$Ct \cos(mt) + Dt \sin(mt)$

où C et D sont des constantes à déterminer.

Exemple 9.3.6. Résoudre $x'' + x = \sin(2t)$.

9.4 Systèmes linéaires ($n \geq 2$) à coefficients constants

On suppose ici $n \geq 2$ et que $\mathcal{A} : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est constante. On s'intéresse donc à l'équation

$$X' = \mathcal{A}X + B(t),$$

où \mathcal{A} est une matrice (constante) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et où $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

Petit rappel d'algèbre linéaire : on peut définir l'exponentielle d'une matrice. On prouve que $e^{\mathcal{A}}$ et \mathcal{A} commutent, que $e^{\mathcal{A}}$ est inversible d'inverse $e^{-\mathcal{A}}$. On prouve également que $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dérivable de dérivée $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{A}e^{t\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9.4.1 Equation homogène (H) : $X' = \mathcal{A}X$

Théorème 9.4.1 (Résolution de $X' = \mathcal{A}X$). *Les solutions sur \mathbb{R} de $X' = \mathcal{A}X$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^{t\mathcal{A}}C$ où $C \in \mathbb{R}^n$ est arbitraire.*

Preuve. Si X est solution alors $(e^{-t\mathcal{A}}X)' = -\mathcal{A}e^{-t\mathcal{A}}X + e^{-t\mathcal{A}}X' = e^{-t\mathcal{A}}(-\mathcal{A}X + X') = 0$ donc $e^{-t\mathcal{A}}X$ est une colonne constante C puis $X = e^{t\mathcal{A}}C$. Réciproquement on vérifie que ces fonctions conviennent. \square

Pour résoudre l'équation homogène il "suffit" donc de calculer $e^{t\mathcal{A}}$. Des outils existent pour cela (décomposition de Dunford-Jordan par exemple) et on renvoie au cours d'algèbre linéaire. On va simplement considérer ici le cas très favorable où \mathcal{A} est diagonalisable, ce qui permet de se ramener à calculer des exponentielles de réels, ce qui est bien plus agréable.

Commençons par observer que si $\mathcal{D} = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale alors $e^{t\mathcal{D}} = \text{Diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ et donc

$$X(t) = \left(x_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, x_n(t) = \alpha_n e^{\lambda_n t} \right) \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n.$$

De toute façon, dans ce cas, le système différentiel $X' = \mathcal{D}X$ est constituée de n équations différentielles linéaires *découplées* ($1 \leq i \leq n$)

$$x'_i = \lambda_i x_i,$$

qui se résolvent tranquillement en ($1 \leq i \leq n$)

$$x_i(t) = \alpha_i e^{\lambda_i t}, \quad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Si \mathcal{A} est diagonalisable alors, en changeant de base, on se ramène à un tel découplage.

Corollaire 9.4.2 (Cas très favorable : \mathcal{A} est diagonalisable). *Si \mathcal{A} est diagonalisable dans \mathbb{R} , on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres réelles et X_1, \dots, X_n les vecteurs propres réels associés. Alors les solutions sur \mathbb{R} de $X' = \mathcal{A}X$ sont les fonctions de la forme*

$$t \mapsto \alpha_1 \underbrace{e^{t\lambda_1} X_1}_{=V_1(t)} + \dots + \alpha_n \underbrace{e^{t\lambda_n} X_n}_{=V_n(t)}$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels arbitraires.

Exemple 9.4.3. *On résout*

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y. \end{cases}$$

Les valeurs propres de $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ sont 1 et -1 associées à $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Les solutions sont donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Il peut aussi être utile “d’aller faire un tour dans \mathbb{C} ”, puis de “revenir dans \mathbb{R} ” à la fin... Par exemple si $n = 2$, supposons que la matrice réelle \mathcal{A} soit diagonalisable dans \mathbb{C} . Notons θ_1, θ_2 ses deux valeurs propres complexes *conjuguées* et Z_1, Z_2 les vecteurs propres complexes *conjugués* associés. Alors les solutions à valeurs \mathbb{C}^2 (temporairement) de $X' = \mathcal{A}X$ sont de la forme

$$t \mapsto \alpha_1 e^{t\theta_1} Z_1 + \alpha_2 e^{t\theta_2} Z_2$$

avec α_1, α_2 des complexes arbitraires. Maintenant, comme $\overline{e^{t\theta_2} Z_2} = e^{t\theta_1} Z_1$, pour retourner aux solutions à valeurs \mathbb{R}^2 , on doit avoir $\overline{\alpha_2} = \alpha_1$. En notant $\alpha_1 = a + ib, \alpha_2 = a - ib, \theta_1 = c + id, \theta_2 = c - id$ on arrive, après quelques calculs, aux solutions à valeurs \mathbb{R}^2 de $X' = \mathcal{A}X$. Elles contiennent des termes exponentiels e^{ct} (amortissement si $c < 0$, amplification si $c > 0$, pas d’effet si $c = 0$) et des termes d’oscillations $\cos(dt), \sin(dt)$, et les deux constantes réelles libres sont a et b , cf exemple ci-dessous.

Exemple 9.4.4. *On résout*

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - y. \end{cases}$$

Les valeurs propres sont cette fois complexes : $-j = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ associées à $\begin{pmatrix} j-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} j^2-1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les solutions à valeurs \mathbb{C}^2 sont donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} j-1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-jt} + \alpha_2 \begin{pmatrix} j^2-1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-j^2 t},$$

avec α_1, α_2 complexes. Si on veut les solutions à valeurs \mathbb{R}^2 il faut que $\overline{\alpha_2} = \alpha_1$. En posant $\alpha_1 = a + ib$, on trouve, après quelques calculs,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ 2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \end{pmatrix} e^{t/2} + b \begin{pmatrix} -3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ 2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \end{pmatrix} e^{t/2}.$$

9.4.2 Equation (E) : $X' = \mathcal{A}X + B(t)$

Pour trouver une solution particulière à l’équation $X' = \mathcal{A}X + B(t)$ on “fait varier la constante C ” : on écrit

$$Z(t) := e^{t\mathcal{A}} C(t),$$

et on veut que Z soit une solution particulière de (E). En injectant dans l’équation, on voit qu’il faut $e^{t\mathcal{A}} C'(t) = B(t)$ et on choisit donc

$$C(t) = \int_{t_0}^t e^{-s\mathcal{A}} B(s) ds,$$

où $t_0 \in I$. Une solution particulière de (E) est donc

$$Z(t) = e^{t\mathcal{A}} \int_{t_0}^t e^{-s\mathcal{A}} B(s) ds.$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \underbrace{e^{t\mathcal{A}} C}_{\text{les sol. de (H)}} + \underbrace{e^{t\mathcal{A}} \int_{t_0}^t e^{-s\mathcal{A}} B(s) ds}_{\text{une sol. part. de (E)}}$$

où $C \in \mathbb{R}^n$ est arbitraire.

Si on veut résoudre le problème de Cauchy avec la condition initiale $X(t_0) = X_0$, on doit choisir $C = e^{-t_0 A} X_0$ et la solution est donc

$$t \mapsto e^{(t-t_0)A} X_0 + e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA} B(s) ds.$$

Exemple 9.4.5. On résout sur $]0, +\infty[$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1} \\ y' = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1} \\ x(1) = 2(1 + \ln(e - 1))e^{-1} \\ y(1) = -3(1 + \ln(e - 1))e^{-1}. \end{cases}$$

1. Comme ci dessus on trouve les solutions de l'équation homogène (H) ; elles sont données par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

2. On cherche une solution particulière de (E) : la variation des constantes $\alpha_1 \leftarrow \alpha_1(t)$ et $\alpha_2 \leftarrow \alpha_2(t)$ conduit au système

$$\begin{cases} \alpha_1' + 2e^{-t}\alpha_2' = \frac{2}{e^t - 1} \\ -2\alpha_1' - 3e^{-t}\alpha_2' = -\frac{3}{e^t - 1}, \end{cases}$$

qu'on résout en $\alpha_1'(t) = 0$ et $\alpha_2'(t) = \frac{e^t}{e^t - 1}$. On choisit donc $\alpha_1(t) = 0$ et $\alpha_2(t) = \ln(e^t - 1)$ d'où une solution particulière :

$$t \mapsto \ln(e^t - 1) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

3. Les solutions de (E) sont donc données par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (\alpha_2 + \ln(e^t - 1)) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

4. Les conditions initiales imposent $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 1$. La solution du problème de Cauchy est donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (1 + \ln(e^t - 1)) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

9.5 Exercices

Ordre 1

Exercice 9.5.1. La vitesse de déplacement des ions entre deux électrodes immergées dans un électrolyte vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v = \frac{F}{m}$$

où m, F, R sont des constantes. Calculer v .

Exercice 9.5.2. Résoudre les problèmes de Cauchy

1. $x' - 2x = e^{2t^2}$ avec $x(0) = 0$.
2. $x' - \frac{1}{1+t}x = 2t^2$ avec $x(0) = -3$.
3. $x' - (1+t)x = -2t - t^2$ avec $x(0) = 2$.

Exercice 9.5.3. Résoudre les équations différentielles suivantes en en donnant toutes les solutions maximales :

1. $x' + x = \sin t$,
2. $x' = 3t^2 - \frac{x}{t}$.

Exercice 9.5.4. Pour $a > 0$ on considère la fonction Gaussienne définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = e^{-ax^2}$. On définit sa “transformée de Fourier” comme la fonction notée $\widehat{\varphi}$ et définie sur \mathbb{R} par

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx.$$

1. Montrer $\widehat{\varphi}$ est bien définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que $\widehat{\varphi}$ est C^1 sur \mathbb{R} et exprimer $\widehat{\varphi}'(\xi)$ comme une intégrale à paramètre.
3. En intégrant par parties l'expression de $\widehat{\varphi}'(\xi)$, trouver un problème de Cauchy linéaire vérifié par $\widehat{\varphi}$.
4. Calculer $\widehat{\varphi}(\xi)$.

Exercice 9.5.5. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt.$$

1. Montrer que φ est bien définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que φ est C^1 sur \mathbb{R} et exprimer $\varphi'(x)$ comme une intégrale à paramètre.
3. En intégrant par parties l'expression de $\varphi'(x)$, trouver un problème de Cauchy linéaire vérifié par φ .
4. Calculer $\varphi(x)$.
5. Pouvez vous calculer $\varphi(x)$ “directement” et, ainsi, court-circuiter l'exercice ?...

Exercice 9.5.6. On considère le système linéaire d'équations différentielles

$$\begin{cases} x' &= -5x + 8y - 4 \\ y' &= -4x + 7y + 3 \end{cases} \quad (9.2)$$

avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $y(0) = 1$.

1. Trouver les vecteur propres et valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Expliquer pourquoi résoudre (9.2) revient à résoudre le système

$$\begin{cases} a' &= 3a + 10 \\ b' &= -b - 7 \end{cases} \quad (9.3)$$

avec les conditions initiales $a(0) = 2$ et $b(0) = -1$.

3. Trouver la solution de (9.3), puis celle de (9.2).

Exercice 9.5.7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) + f(t) = 0.$$

En résolvant l'EDO $x' + x = f'(t) + f(t)$, montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Exercice 9.5.8. Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.5.9. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x'_2 &= 6x_1 - x_2 \\ x'_3 &= -x_1 - 2x_2 - x_3. \end{cases}$$

Exercice 9.5.10. Résoudre les équations différentielles $X' = AX$ dans les cas suivants :

$$1. \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2. \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3. \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.5.11 (EDO linéaires à coefficients non constants en dimension 2...). On considère la matrice $\mathcal{A}(t)$, dépendant de la variable $t \in \mathbb{R}$ et donnée par

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $B(t) = \int_0^t \mathcal{A}(s) ds$ puis $e^{B(t)}$.

2. Comparer $B'(t)e^{B(t)}$ et $(e^{B(t)})'$.

3. Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une unique solution $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ au problème de Cauchy

$$X' = \mathcal{A}(t)X, \quad X(0) = X_0.$$

4. A-t-on $\gamma(t) = e^{B(t)}X_0$? Comparer avec le cas des EDO linéaires en dimension 1.

Exercice 9.5.12 (EDO linéaires à coefficients non constants en dimension 2...). Résoudre le système différentiel (où les inconnues x et y sont à valeurs réelles)

$$\begin{cases} x' &= tx - y \\ y' &= x + ty. \end{cases}$$

On pourra poser $z = x + iy...$

Ordre 2**Exercice 9.5.13.** Résoudre les problèmes de Cauchy

1. $x'' - 2x' - 3x = \cos t$ avec la condition initiale $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.
2. $x'' - 3x' + x = t$ avec la condition initiale $x(0) = 10$ et $x'(0) = -10$.

Exercice 9.5.14. Trouver une solution de

$$t^2x'' + 4tx' + 2x = e^t$$

sous forme d'une série entière.

Exercice 9.5.15. La vitesse u d'un liquide à l'intérieur d'un capillaire dépend de la distance r à l'axe de ce capillaire suivant la formule

$$r \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = -kr$$

où k est une constante. Calculer $u(r)$ en fonction de r .**Exercice 9.5.16.** On considère l'équation différentielle (sur $]0, +\infty[$)

$$t^2x'' - 2x + \frac{3}{t} = 0. \quad (9.4)$$

1. Montrer qu'en posant $z(t) = tx'(t) + x(t)$ on obtient l'EDO du premier ordre

$$tz' - 2z + \frac{3}{t} = 0.$$

2. Résoudre cette dernière équation différentielle.
3. En déduire les solutions de (9.4).

Exercice 9.5.17. On considère l'équation différentielle (sur $]0, +\infty[$)

$$t^2x'' + tx' - x = \frac{1}{t}.$$

En utilisant le changement de variable $t = e^u$, trouver la solution satisfaisant $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.**Exercice 9.5.18.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ soient bornées.**Exercice 9.5.19.** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)dt$.**Exercice 9.5.20.** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Chapitre 10

Des outils pour les EDO non linéaires

On a vu au Chapitre 9 que pour une EDO *linéaire* (sous des hypothèses “raisonnables”) les solutions maximales sont globales, que la structure de l’ensemble des solutions est connue et que, dans un certain nombre de cas, on savait calculer les solutions.

Cependant la majorité des phénomènes biologiques, physiques, chimiques etc sont non linéaires et les EDO *non linéaires* sont bien plus difficiles... On a déjà vu que les solutions ne sont pas forcément globales (explosion en temps fini par exemple). Quant à “calculer les solutions” cela est réservé à quelques familles sympathiques mais rares, cf sous-section 10.1.1. On voudrait donc développer des techniques *qualitatives* pour pouvoir décrire la solution (typiquement fournie par le Théorème 8.2.5 de Cauchy-Lipschitz) sans pour autant la calculer : est elle globale ? si oui quel est son comportement asymptotique quand, disons, $t \rightarrow +\infty$? etc... On va donner ici quelques pistes sans rentrer dans trop de théorie (que le lecteur intéressé pourra consulter dans [3] ou [4]).

10.1 Equations scalaires (taille 1)

10.1.1 Quelques cas “calculables”

On donne ici quelques équations non linéaires pour lesquelles on a des techniques de calcul relativement efficaces. On passe parfois sous silence quelques arguments de type “Cauchy-Lipschitz” qui justifient les calculs faits.

- **Equations lacunaires** $x' = f(x)$

On écrit $\frac{dx}{f(x)} = dt$ d’où, par intégration, t en fonction de x puis, en inversant, x en fonction de t . Si l’intégration ET l’inversion sont explicites, alors on a une expression explicite de $x(t)$. Sinon, l’expression est implicite, cf Exercice 10.4.1.

Exemple 10.1.1. Résoudre

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

On a $\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$ puis $dt = \frac{dx}{1+x^2}$ et donc $\int_0^T dt = \int_{x(0)=0}^{x(T)} \frac{dx}{1+x^2}$, soit encore $T = \arctan x(T)$ et enfin $x(T) = \tan T$ qu’on écrit plutôt $x(t) = \tan t$.

- **Equations aux variables séparées** $x' = f(x)g(t)$

On écrit $\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$ d’où, par intégration, “une fonction de x =une fonction de t ” puis, en inversant, x en fonction de t , avec les mêmes remarques que ci dessus.

Exemple 10.1.2. Résoudre

$$\begin{cases} x' = t(1 + x^2) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

• **Equation de Bernoulli** $x' = a(t)x + b(t)x^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

Pour trouver d'autres solutions que la fonction nulle on écrit

$$\frac{x'}{x^{n+1}} = a(t)\frac{1}{x^n} + b(t),$$

et en posant $z = \frac{1}{x^n}$ on est ramené à l'équation différentielle du premier ordre :

$$-\frac{1}{n}z' = a(t)z + b(t).$$

Exemple 10.1.3. Soit $x' = 2tx + 3x^2$. La fonction nulle est solution ! Pour d'autres solutions on a

$$\frac{x'}{x^2} = 2t\frac{1}{x} + 3,$$

soit encore (en posant $z = 1/x$) $z' = -2tz - 3$, équation linéaire du premier ordre que l'on sait résoudre...

• **Equation de Riccati** $x' = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$

Si on a la chance d'avoir une solution particulière x_1 alors on cherche les autres sous la forme $x = x_1 + h$ avec h à déterminer. On voit alors que h doit vérifier l'équation de Bernoulli

$$h' = (b(t) + 2c(t)x_1(t))h + c(t)h^2$$

qu'on sait résoudre (cf ci dessus).

10.1.2 Equations scalaires autonomes : études qualitatives

On prend ici $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur \mathbb{R} et on s'intéresse à l'EDO $x' = f(x)$ et au problème de Cauchy associé, disons

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \text{ donné.} \end{cases}$$

Le Théorème 8.2.5 de Cauchy-Lipschitz donne une unique solution maximale x , définie sur un intervalle ouvert $]T_{min}, T_{max}[$ avec

$$-\infty \leq T_{min} < 0 < T_{max} \leq +\infty.$$

On aimerait savoir, par exemple, si T_{max} est fini ou pas. Ensuite, si $T_{max} = +\infty$, on cherche typiquement à comprendre le comportement de $x(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Définition 10.1.4 (Equilibre). Les équilibres de l'équation différentielle $x' = f(x)$ sont les zéros de f , cad les solutions x^* de $f(x^*) = 0$.

Par le Théorème 8.2.5 de Cauchy-Lipschitz, si une solution de l'EDO $x' = f(x)$ vaut x^* (un équilibre) à un temps alors elle vaut x^* à tous les temps ! Dit autrement, la solution du problème de Cauchy avec une donnée initiale qui n'est pas un équilibre ne peut jamais toucher un équilibre : les équilibres sont des frontières infranchissables !

D'autre part, lorsque $T_{max} = +\infty$, les équilibres sont des candidats "naturels" pour décrire le comportement de $x(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$: si $x(t)$ a une limite finie quand $t \rightarrow +\infty$ alors cette limite doit être un équilibre.

Exemple 10.1.5. *Montrer, sans calculer la solution, que la solution du problème de Cauchy logistique $x' = x(1 - x)$, $x(0) = x_0 \geq 0$ est globale et déterminer le comportement de $x(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Et quid si $x_0 < 0$?...*

Lorsqu'on dispose d'un équilibre x^* on peut se demander ce qu'il se passe lorsqu'on prend une donnée initiale proche de x^* . Par exemple, l'Exemple 10.1.5 nous dit que pour l'équation logistique, l'équilibre 0 est instable : si $x_0 = 0$ alors $x \equiv 0$ et si on perturbe un peu la donnée initiale alors la solution “fuit” l'équilibre 0 ; en revanche l'équilibre 1 est stable : si $x_0 = 1$ alors $x \equiv 1$ et si on perturbe un peu la donnée initiale alors la solution “reste proche” de l'équilibre 1 et “revient même” vers l'équilibre 1 (on parle de stabilité asymptotique).

Définition 10.1.6 (Equilibre stable ou instable). *On dit qu'un équilibre x^* est stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que : pour toute donnée initiale x_0 telle que $|x_0 - x^*| < \alpha$, la solution x du problème de Cauchy $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ est définie pour tous les temps $t \geq 0$ et vérifie*

$$|x(t) - x^*| < \varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

On dit qu'un équilibre x^ est instable s'il n'est pas stable.*

Définition 10.1.7 (Equilibre asymptotiquement stable). *On dit qu'un équilibre x^* est asymptotiquement stable s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : pour toute donnée initiale x_0 telle que $|x_0 - x^*| < \varepsilon$, la solution x du problème de Cauchy $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ est définie pour tous les temps $t \geq 0$ et vérifie*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*.$$

Evidemment la stabilité asymptotique implique la stabilité.

Exemple 10.1.8. *Pour l'EDO linéaire $x' = ax$ (où $a \in \mathbb{R}$), l'équilibre $x^* = 0$ est instable quand $a > 0$, stable (mais pas asymptotiquement stable) quand $a = 0$, asymptotiquement stable quand $a < 0$.*

Théorème 10.1.9 (Stabilité, instabilité). *Soit x^* un équilibre.*

- *Si $f'(x^*) > 0$ alors l'équilibre x^* est instable.*
- *Si $f'(x^*) < 0$ alors l'équilibre x^* est asymptotiquement stable.*

10.2 Systèmes différentiels autonomes de taille 2

On prend ici $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , et on s'intéresse à l'EDO $X' = f(X)$ qu'on peut mettre sous forme de système

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y), \end{cases}$$

et au problème de Cauchy associé avec donnée initiale $x(0) = x_0$ donné, $y(0) = y_0$ donné. On voudrait faire une étude qualitative¹ de la solution (x, y) donnée par le Théorème 8.2.5 de Cauchy-Lipschitz, dans l'esprit de la sous-section 10.1.2. Par exemple, si la solution est globale, que se passe-t-il en temps grand pour la solution $(x(t), y(t))$? Convergence vers un équilibre (x^*, y^*) ? Oscillations? Autre chose?... Notons qu'on définit un équilibre comme un couple (x^*, y^*) tel que

$$\begin{cases} f_1(x^*, y^*) = 0 \\ f_2(x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

1. L'idée n'est pas de faire une théorie parfaite (cf [3] ou [4]) mais de traiter quelques exemples significatifs.

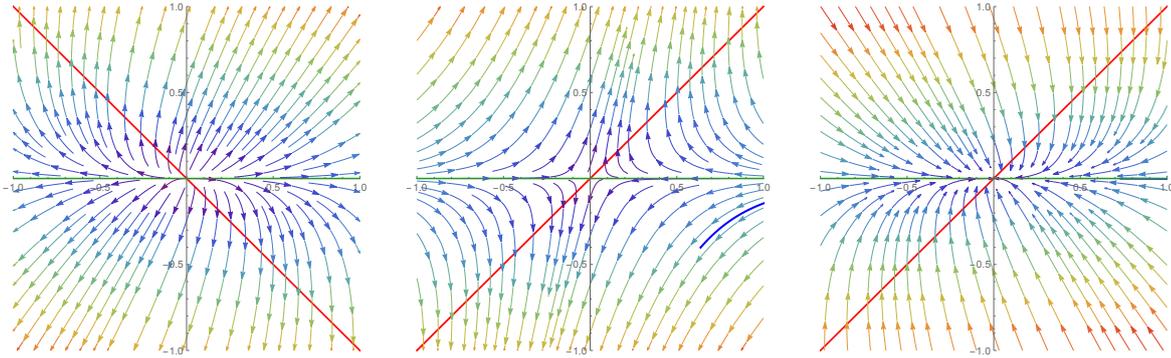


FIGURE 10.1 – Les valeurs propres sont réelles. A gauche : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ (NOEUD INSTABLE). Au centre : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ (POINT SELLE). A droite : $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ (NOEUD STABLE).

Notion de trajectoire. Prenons $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$. Je peux, dans un repère, mettre t en abscisse et tracer les deux courbes représentatives des fonctions x , y , avec en ordonnée $x(t)$ (ou $y(t)$). Je suis donc dans le plan (t, x) (ou (t, y)) et j'ai deux sinusoides qui "oscillent" autour de 0. Une autre façon de voir est de tracer la trajectoire associée cad l'ensemble des points $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ quand le temps t décrit \mathbb{R} . Je suis donc dans le plan (x, y) et j'ai le cercle de centre l'origine et de rayon 1.

Notez que, quand je trace la courbe représentative d'une fonction, pour chaque abscisse on a (au maximum) un point. En revanche, quand je trace une trajectoire, pour chaque abscisse on peut avoir plusieurs points. C'est le cas si au cours du temps, (x, y) repasse par le même point, ce qui arrive toujours quand x et y sont périodiques avec même période (cf ex. ci dessus).

Quel est l'intérêt pour nous ? Eh bien, ne sachant en général pas calculer les solutions $x(t)$ et $y(t)$ d'un système différentiel non linéaire on a peu de chances de tracer leurs courbes... Mais on dispose d'outils adaptés pour dire des choses sur les trajectoires², et donc sur $x(t)$ et $y(t)$. On va expliquer cela sur quelques exemples non linéaires en sous-section 10.2.2 mais avant cela, petit retour sur les systèmes linéaires.

10.2.1 Stabilité linéaire

Considérons ici $X' = \mathcal{A}X$ un système linéaire de taille 2 avec $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et admettons pour simplifier que

$$\mathcal{A} \text{ admet 2 valeurs propres distinctes } \lambda_1 \neq 0 \text{ et } \lambda_2 \neq 0.$$

Alors \mathcal{A} est inversible donc le seul équilibre est $(0, 0)$ et, quitte à aller faire un tour dans \mathbb{C} , \mathcal{A} est diagonalisable. Au vu du Corollaire 9.4.2, les valeurs propres λ_1 et λ_2 disent directement si l'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable (auquel cas toute trajectoire passant suffisamment proche de $(0, 0)$ convergera vers $(0, 0)$ en temps grand), stable, ou instable, cf Figures 10.1 et 10.2.

10.2.2 Le cas non linéaire par des exemples

Face à un système non linéaire

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y), \end{cases}$$

2. Notons que la trajectoire associée à une solution maximale est appelée courbe intégrale et qu'une courbe intégrale passant par un point $X_0 = (x_0; y_0)$ est appelée orbite de X_0 .

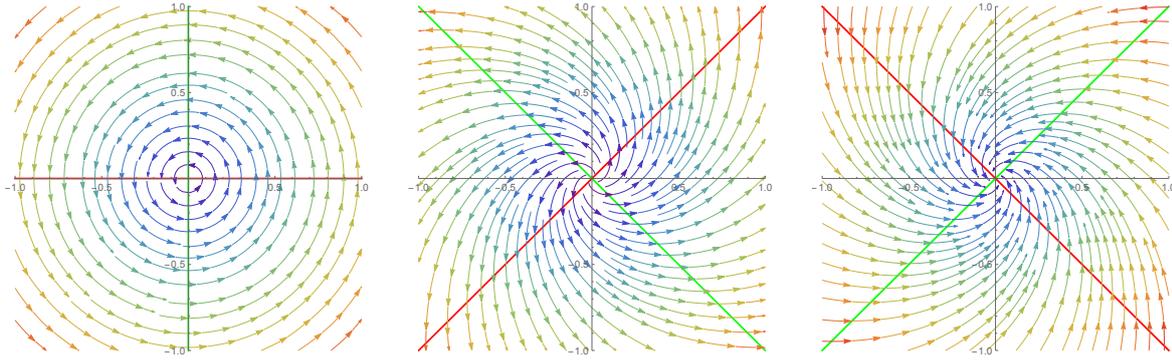


FIGURE 10.2 – Les valeurs propres sont complexes conjuguées, disons $\alpha \pm i\beta$ ($\beta \neq 0$). A gauche : $\alpha = 0$ (éq. STABLE mais PAS ASYMPTOTIQUEMENT STABLE, on parle de CENTRE). Au centre : $\alpha > 0$ (FOYER INSTABLE). A droite : $\alpha < 0$ (FOYER STABLE).

on peut utiliser la méthode du plan de phase : on se place dans le plan (x, y) , on trace les isoclines zéro, la direction des courbes intégrales, détermine les équilibres et on étudie leur stabilité. Notons que la stabilité non linéaire est une notion subtile, cf [3, Chapitre 8], mais on retient les cas favorables suivants.

Théorème 10.2.1 (Stabilité non linéaire, cas favorables). *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 et (x^*, y^*) un équilibre, cad $f(x^*, y^*) = (0, 0)$.*

- Si les 2 valeurs propres de la jacobienne $Df(x^*, y^*)$ sont de partie réelle strictement négatives alors l'équilibre (x^*, y^*) est asymptotiquement stable pour l'équation $X' = f(X)$.
- Si (au moins) l'une des 2 valeurs propres de la jacobienne $Df(x^*, y^*)$ est de partie réelle strictement positive alors l'équilibre (x^*, y^*) est instable pour l'équation $X' = f(X)$.

Moralement, il suffit dans les cas favorables de linéariser autour de l'équilibre et on retombe en sous-section 10.2.1... Notons que l'apparition de valeurs propres à partie réelle nulle a tendance à nous faire sortir des situations favorables (cas dégénérés)... Ainsi :

Exemple 10.2.2. Comparer les trajectoires du système non linéaire

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -y, \end{cases}$$

avec celles du système linéarisé en $(0, 0)$, cad

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -y. \end{cases}$$

Proie-prédateur

On reprend

$$\begin{cases} x' = x(1 - y) \\ y' = ry(-2 + x). \end{cases} \quad \text{PROIE-PREDATEUR}$$

On trace (en rouge) l'isocline $x' = 0$, cad dans le plan (x, y) les points qui annulent $x(1 - y)$, soit deux droites. Cette isocline partage le plan en régions où “ x grandit” et en régions où “ x diminue”.

On trace (en vert) l'isocline $y' = 0$, cad dans le plan (x, y) les points qui annulent $ry(-1 + x)$, soit deux droites. Cette isocline partage le plan en régions où “ y grandit” et en régions où “ y diminue”.

• Première info : à l'intersection des deux isoclines, on trouve les équilibres du système. Ici les équilibres sont $(0, 0)$ (tout le monde disparaît) et $(2, 1)$ (tout le monde survit avec saturation).

• Deuxième info : on peut dessiner des flèches qui indiquent la direction des courbes intégrales.

Avec cela, on comprend (à peu près) que les trajectoires auront tendance à “tourner” autour de l'équilibre $(2, 1)$. Vont elles spiraler de manière concentrique ? spiraler de manière excentrique ? rester en orbite ? Pour répondre à ces questions, il faut étudier la stabilité non linéaire de l'équilibre $(2, 1)$. Pour cela, on linéarise autour de l'équilibre, puis on cherche les valeurs propres du linéarisé. Commençons par le faire autour de l'équilibre $(0, 0)$.

Stabilité de $(0, 0)$. Si $x \approx 0$ et $y \approx 0$ alors le système devient

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -2ry, \end{cases} \quad \text{PROIE-PREDATEUR LINEARISE EN } (0, 0)$$

soit un système linéaire, de matrice $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2r \end{pmatrix}$. Une des valeurs propres est strictement positive, donc l'équilibre est instable pour le linéarisé et pour le système non linéaire.

Stabilité de $(2, 1)$. Si $\bar{x} = 2 - x \approx 0$ et $\bar{y} = 1 - y \approx 0$ alors le système devient

$$\begin{cases} \bar{x}' = -2\bar{y} \\ \bar{y}' = r\bar{x}, \end{cases} \quad \text{PROIE-PREDATEUR LINEARISE EN } (2, 1)$$

soit un système linéaire, de matrice $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ r & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont complexes conjuguées $\pm i\sqrt{2r}$. Donc pour le linéarisé l'équilibre $(2, 1)$ est un centre. On ne peut rien en déduire pour le système non linéaire car notre Théorème 10.2.1 n'est pas assez fort...

Cette analyse par plan de phase (cf Figure 10.3 partie gauche) suggère que les courbes intégrales vont en temps grand tourner autour du point $(2, 1)$ sans converger vers lui, cad que les solutions du système proie-prédateur vont osciller autour de 2 pour les proies et de 1 pour les prédateurs en opposition de phases (cf Figure 10.3 partie droite) : x (=proie) croît, faisant augmenter y (=prédateur) ; donc par prédation x diminue puis, par manque de nourriture y décroît ; donc par manque de prédateur, x croît etc...etc... On renvoie à l'Exercice 10.4.12 pour une preuve rigoureuse de ceci.

Compétition

On reprend

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \alpha y) \\ y' = ry(1 - y - \beta x). \end{cases} \quad \text{COMPETITION}$$

Les équilibres sont $(0, 0)$ (cad tout le monde perd), $(0, 1)$ (cad y gagne), $(1, 0)$ (cad x gagne) et $(\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta})$ qu'on ne garde que s'il est positif en dynamique des populations (cad coexistence). A l'aide d'une analyse par plan de phase (cf Exercice 10.4.9), on peut arriver aux résultats suivants concernant le comportement de $(x(t), y(t))$ quand $t \rightarrow +\infty$:

- si $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$ alors la compétition est faible et on a coexistence, cad $x(t) \rightarrow \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}$, $y(t) \rightarrow \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}$.
- si $0 < \alpha < 1$ et si $\beta > 1$ alors x est un meilleur compétiteur et il l'emporte (et y disparaît), cad $x(t) \rightarrow 1$, $y(t) \rightarrow 0$.

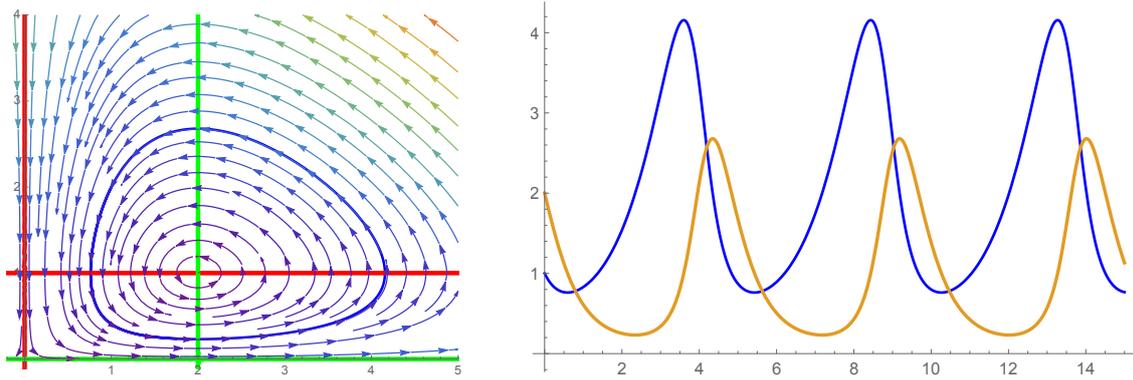


FIGURE 10.3 – Proie-prédateur. A gauche : le plan de phase, en bleu l'orbite de $(x_0, y_0) = (1, 2)$. A droite : $x(t)$ (les proies, en bleu) en fonction du temps et $y(t)$ (les prédateurs, en orange) en fonction du temps, avec condition initiale $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

- si $\alpha > 1$ et si $0 < \beta < 1$ alors y est un meilleur compétiteur et il l'emporte (et x disparaît), cad $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 1$.
- si $\alpha > 1$ et si $\beta > 1$ alors on a deux bons compétiteurs et le résultat dépend des conditions initiales (cas beaucoup plus difficile à étudier)...

On remarque que le r n'intervient pas pour séparer les cas. En fait, il intervient dans la "dynamique" du système, en jouant sur la vitesse de convergence vers l'équilibre.

Le pendule

Souvenons qu'une EDO de taille 1 (cad scalaire) et d'ordre 2 se ramène à une EDO de taille 2 (cad un système de taille 2) et d'ordre 1. Aussi le problème de Cauchy non linéaire pour le pendule

$$\begin{cases} \theta'' = -\sin \theta \\ \theta(0) \text{ donné} \\ \theta'(0) \text{ donné} \end{cases}$$

trouve sa place dans cette section : en posant $x = \theta$ (la position angulaire), $y = \theta'$ (la vitesse angulaire), le problème se réécrit

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x \\ x(0) \text{ donné} \\ y(0) \text{ donné.} \end{cases} \quad (10.1)$$

La non linéarité $(x, y) \mapsto (y, -\sin x)$ étant globalement lipschitzienne sur \mathbb{R}^2 , le Théorème 8.4.4 de Cauchy-Lipschitz global nous assure l'existence et unicité d'une solution (x, y) maximale qui de plus est globale, cad $t \mapsto (x(t), y(t))$ est définie sur \mathbb{R} tout entier. Ce qui nous intéresse maintenant c'est de déterminer le comportement asymptotique quand $t \rightarrow +\infty$. Sur la Figure 10.4, on comprend que certaines trajectoires sont périodiques (oscillations du pendule autour de la position verticale), alors que d'autres non (par exemple, si la vitesse initiale est grande, le pendule "enchaîne les tours jusqu'à l'infini"). On renvoie à l'Exercice 10.4.13 pour plus de détails.

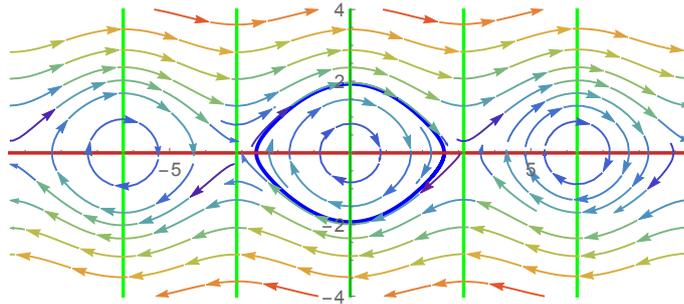


FIGURE 10.4 – Le problème de Cauchy (10.1), en bleu la trajectoire pour la condition initiale $x(0) = 2.8$, $y(0) = 0$.

10.3 Fonction de Lyapounov

On prend ici $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) de classe C^1 sur \mathbb{R}^n et on considère le système autonome

$$X' = f(X). \quad (10.2)$$

On suppose que 0 est un équilibre et on s'intéresse à sa stabilité.

Définition 10.3.1 (Fonction de Lyapounov). *Soit U un voisinage de 0 et $L : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On dit que L est une fonction de Lyapounov pour (10.2) en l'équilibre 0 si*

- (i) $L(0) = 0$ et, pour tout $X \in U \setminus \{0\}$, $L(X) > 0$.
- (ii) pour tout $X_0 \in U \setminus \{0\}$, $t \mapsto L(X(t))$ est décroissante (ici X désigne la solution maximale de (10.2) avec donnée initiale X_0).

Si dans (ii) on a une décroissance stricte on parle de fonction de Lyapounov stricte.

Intuitivement, si L est une fonction de Lyapounov (stricte) les trajectoires vont avoir tendance à ne pas s'éloigner (se rapprocher) du minimum de L c'est à dire 0.

Notons que

$$\frac{d}{dt}L(X(t)) = \langle \nabla L(X(t)), X'(t) \rangle = \langle \nabla L(X(t)), f(X(t)) \rangle.$$

Exemple 10.3.2 (Système gradient). *On parle de système gradient lorsque f "dérive d'un V " c'est à dire*

$$X' = -\nabla V(X).$$

Dans ce cas V est un bon candidat à "être une fonction de Lyapounov" car

$$\frac{d}{dt}V(X(t)) = -\|\nabla V(X(t))\|^2 \leq 0.$$

Théorème 10.3.3 (Stabilité via Lyapounov). *Si on dispose d'une fonction de Lyapounov pour (10.2) en l'équilibre 0 alors 0 est un équilibre stable. Si de plus la fonction de Lyapounov est stricte, alors 0 est asymptotiquement stable.*

Exercice 10.3.4. *On considère*

$$(S_1) \begin{cases} x' = y - x(x^2 + y^2) \\ y' = -x - y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x' = y + x(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Montrer que, pour les deux systèmes, $(0, 0)$ est l'unique équilibre et que le linéarisé en $(0, 0)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont $\pm i$. Ainsi le Théorème 10.2.1 ne permet pas de conclure. Néanmoins, en utilisant

$$L : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

montrer que l'équilibre est asymptotiquement stable pour (S_1) mais instable pour (S_2) .

Si 0 est un équilibre asymptotiquement stable, on appelle bassin d'attraction l'ensemble des données initiales $X_0 \in \Omega$ telles que $X(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Théorème 10.3.5 (Globale asymptotique stabilité via Lyapounov). *Supposons $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supposons qu'on dispose d'une fonction de Lyapounov stricte $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pour (10.2) en 0 telle que*

$$L(X) \rightarrow +\infty \text{ quand } \|X\| \rightarrow +\infty.$$

Alors le bassin d'attraction de 0 est \mathbb{R}^n tout entier. On dit que l'équilibre 0 est globalement asymptotiquement stable.

Exercice 10.3.6. *On considère*

$$\begin{cases} x' = -x^5 - y \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

Montrer que $V(x, y) = 2x^2 + y^2$ est une fonction de Lyapounov en $(0, 0)$. Qu'en déduire ?

10.4 Exercices

Taille 1

Exercice 10.4.1 (Effet Allee en dynamique des populations). *On considère le problème de Cauchy non linéaire*

$$\begin{cases} x' = x(x - \theta)(1 - x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $0 < \theta < 1$ est fixé et la donnée initiale $x_0 > 0$.

1. *Mettre en place la technique des équations lacunaires présentée en sous-section 10.1.1. Montrer que l'intégration est explicite mais l'inversion (plutôt) implicite...*
2. *On utilise maintenant plutôt les méthodes qualitatives développées en sous-section 10.1.2 : montrer que la solution du problème de Cauchy est globale, et déterminer le comportement en temps grand de $x(t)$ suivant la valeur de la donnée initiale x_0 . Justifier le fait que θ est qualifié de seuil (dessiner les graphes de la fonction de croissance logistique $x \mapsto x(1 - x)$ et celle de l'exercice présent $x \mapsto x(x - \theta)(1 - x)$).*

Exercice 10.4.2. *Soit f la fonction définie sur $] -1, 1[\times] -1, 1[$ par*

$$f(t, x) = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - t^2}}.$$

Résoudre les problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Exercice 10.4.3. Résoudre le problème de Cauchy logistique $x' = x(1-x)$, $x(0) = x_0 \in]0, 1[$, en traitant l'EDO comme

1. une équation lacunaire (déjà fait en cours!).
2. une équation de Bernouilli.

Exercice 10.4.4 (Compétition périodique). On considère une population (mesurée par $n(t)$ pour $t \geq 0$) et on suppose que la compétition intra spécifique varie avec le temps :

$$n' = n[1 - (2 + \cos t)n].$$

On suppose que la population initiale est $n(0) = 1/2$. Dans le modèle logistique "standard" (obtenu "en enlevant $\cos t$ ") on a alors $n(t) = 1/2$ pour tous les temps. Ici la situation va être différente...

1. Tracer le graphe de $t \mapsto 2 + \cos t$. "Expliquer" l'équation.
2. On pose $p(t) = \frac{1}{n(t)}$. Montrer qu'on a alors l'équation différentielle

$$p' = -p + 2 + \cos t.$$

Quel est l'avantage de cette EDO par rapport à celle vérifiée par $n(t)$? La résoudre (vérifier que $t \mapsto 2 + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ est une solution particulière).

3. En déduire $n(t)$. Que se passe-t-il quand $t \rightarrow +\infty$.

Exercice 10.4.5. Discuter du comportement en temps grand de la solution (est-elle bien globale d'ailleurs?) de

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ 0 < x(0) < 1 \text{ donné,} \end{cases}$$

dans le cas où $f(x) = x(x - \frac{1}{2})(x - 1)$ puis dans le cas où $f(x) = x(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3})(x - 1)$.

Exercice 10.4.6 (Compétition "puissance"). On considère une population (mesurée par $n(t)$ pour $t \geq 0$) décrite par l'équation

$$n' = n(1 - n^\alpha),$$

où $\alpha \geq 1$ est fixé. On suppose que $0 < n(0) < 1$.

1. Montrer que la solution de problème de Cauchy est globale et que $0 < n(t) < 1$ pour tous les temps $t \geq 0$.
2. Quel est le comportement de $n(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.
3. Quel modèle retrouve-t-on pour $\alpha = 1$? et pour $\alpha \rightarrow +\infty$?

Taille 2

Exercice 10.4.7 (Un système linéaire). On se donne le problème de Cauchy linéaire suivant

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Le résoudre en diagonalisant la matrice $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Le résoudre en l'écrivant comme une équation scalaire d'ordre 2.
3. L'étudier avec la méthode du plan de phase.

Exercice 10.4.8. Tracer dans \mathbb{R}^2 les orbites de l'équation différentielle définie par les champs de vecteurs linéaires $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnés par $f(X) = AX$ dans les cas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.4.9 (Compétition). On reprend le système de compétition

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \alpha y) \\ y' = ry(1 - y - \beta x), \end{cases}$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $r > 0$.

1. "Expliquer" formellement le comportement du système en temps grand pour α très petit.
2. On suppose ici $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. Faire une analyse par plan de phase. Que suggère t elle ?
3. On suppose ici $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$. Faire une analyse par plan de phase. Que suggère t elle ?

Exercice 10.4.10 (Mutualisme). On reprend le système de mutualisme

$$\begin{cases} x' = x(1 - x + \alpha y) \\ y' = ry(1 - y + \beta x), \end{cases}$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $r > 0$.

1. On suppose ici $\alpha\beta > 1$ (forte entraide). Faire une analyse par plan de phase. Que suggère t elle ?
2. On suppose ici $\alpha\beta < 1$ (entraide "raisonnée"). Faire une analyse par plan de phase. Que suggère t elle ?

Exercice 10.4.11. On considère deux populations mesurées par $x(t)$ et $y(t)$. Le modèle est le système différentiel non linéaire

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \alpha y) \\ y' = y(-1 + \beta x), \end{cases}$$

où α et β sont deux constantes strictement positives.

1. En quelques phrases, expliquer les phénomènes mis en jeu dans ce système.
2. Dans cette question, on suppose α très petit (cad $\alpha \rightarrow 0$). Formellement, quel est le devenir de la population $x(t)$? Suivant la valeur de β , discuter ensuite le devenir de $y(t)$.
3. Dans cette question, on suppose $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 1$. Tracer les isoclines zéro et la direction des trajectoires. Quels sont les équilibres ? Etudier la stabilité des deux équilibres "faciles". Pour l'équilibre plus "subtil" on admet que :
 - pour β proche de 1, on a (après linéarisation) deux valeurs propres réelles strictement négatives. Que suggère l'analyse sur le devenir des deux populations $x(t)$ et $y(t)$?
 - pour β grand, on a (après linéarisation) deux valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle négative. Que suggère l'analyse sur le devenir des deux populations $x(t)$ et $y(t)$? Quelle différence avec le cas précédent ?

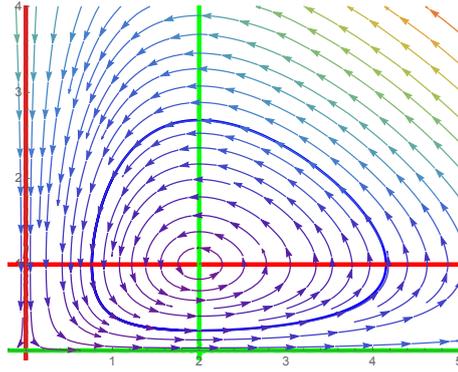


FIGURE 10.5 – Proie-prédateur : le plan de phase, en bleu l'orbite de $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Exercice 10.4.12 (Proie-prédateur). On considère ici le système proie prédateur regardé en cours, à savoir

$$\begin{cases} x' = x(1 - y) \\ y' = ry(-2 + x), \end{cases}$$

avec $r > 0$, dont on fait un problème de Cauchy en adjoignant une condition initiale (x_0, y_0) avec $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$. Il s'agit ici de faire une preuve rigoureuse des comportements que semble indiquer la Figure 10.5 (sur laquelle on va évidemment s'appuyer).

1. Qui sont les équilibres ?
2. Montrer que les axes sont invariants et, plus précisément, calculer les solutions lorsque $x_0 = 0$, puis lorsque $y_0 = 0$.
3. Montrer que le quart de plan ouvert $Q := \{(x, y), x > 0 \text{ et } y > 0\}$ est également invariant, cad que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tous les $t > 0$ d'existence de la solution maximale.
4. Soit $H :]0, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(x, y) = rx + y - 2r \ln x - \ln y.$$

Montrer que H est une intégrale première pour le système proie prédateur, cad que si (x, y) est une solution maximale (avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$) sur un intervalle I alors la fonction $\mathcal{H} : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{H}(t) := H(x(t), y(t)),$$

est constante sur I . En déduire que les solutions maximales sont bornées et donc globales.

5. On va maintenant "suivre" une courbe intégrale. Sur la Figure 10.5 on définit les quatre ouverts $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 2 \text{ et } 0 < y < 1\}$ noté SO comme sud ouest, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 2 \text{ et } 0 < y < 1\}$ noté SE , puis, de même NE et NO . Suivons la courbe intégrale à partir d'un $(x_0, y_0) \in SO$. Montrer qu'après un temps fini, cette courbe passe dans SE . Montrer ensuite qu'après un autre temps fini elle passe dans NE . On admet ensuite qu'elle passe dans NO , puis revient dans SO , puis ça recommence...
6. On va maintenant montrer que la courbe intégrale suivie ci dessus repasse par les mêmes endroits à chaque tour... Précisément, partons de $(x_0, 1)$ avec $0 < x_0 < 2$ cad un point de la frontière NO - SO . Par la question précédente, il existe un temps $T > 0$ de retour à la frontière, cad $x(T) \in (0, 2)$ et $y(T) = 1$. A l'aide de la question 4, montrer que

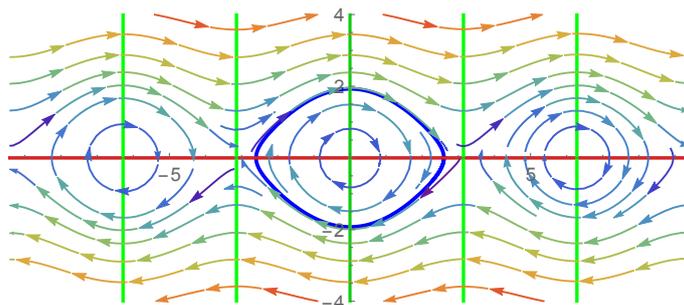


FIGURE 10.6 – Plan de phase pour le pendule. En bleu la trajectoire pour la condition initiale $x(0) = 2.8$, $y(0) = 0$.

forcément $x(T) = x_0$. A l'aide du Théorème de Cauchy-Lipschitz, en déduire que la solution est périodique de période T (qui dépend de r et de la condition initiale et qu'on ne cherchera pas à calculer).

7. Pour conclure, montrons que “ $x(t)$ oscille bien autour de 2” et que “ $y(t)$ oscille bien autour de 1”. On définit les valeurs moyennes de x et de y sur une période par

$$\langle x \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad \langle y \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt.$$

En utilisant que $\frac{x'(t)}{x(t)} = 1 - y(t)$, montrer que $\langle y \rangle = 1$. Que vaut $\langle x \rangle$?

Exercice 10.4.13 (Le pendule). On se donne $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ (un angle initial) et $\omega_0 \in \mathbb{R}$ (une vitesse angulaire initiale) et on considère la solution globale (pourquoi ?) du problème de Cauchy non linéaire

$$\begin{cases} \theta'' = -\sin \theta \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = \omega_0 \end{cases} \quad (10.3)$$

qu'on peut réécrire (comment ?)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x \\ x(0) = \theta_0 \\ y(0) = \omega_0. \end{cases}$$

On voudrait prouver les comportements suggérés par le plan de phase de la Figure 10.6.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 - \cos \theta(t) = C,$$

où $C = \frac{1}{2}\omega_0^2 - \cos \theta_0$ est une constante plus grande que -1 .

2. 1er cas : $C = -1$. Que se passe-t-il ?
 3. 2ème cas : $-1 < C < 1$. Montrer que $\cos \theta(t) > -1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que $-\pi < \theta(t) < \pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que θ ne peut pas être monotone (ni ultimement monotone d'ailleurs). En s'inspirant de l'Exercice 10.4.12, montrer que la courbe intégrale “visite” 4 ouvertures à préciser et en déduire que θ est périodique.

4. 3ème cas : $C = 1$. Par exemple que se passe t il si $\theta_0 = \pi$, $\omega_0 = 0$? Notons que, dans d'autres situations, on peut montrer qu'il existe des solutions connectant l'équilibre $(-\pi, 0)$ quand $t \rightarrow -\infty$ à l'équilibre $(\pi, 0)$ quand $t \rightarrow +\infty$. Sont ce des solutions "physiques" ?
5. 4ème cas : $C > 1$. Montrer que θ' ne s'annule jamais et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : soit $\theta'(t) \geq \alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $\theta'(t) \leq -\alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Que se passe t il ?
6. Retour sur le 2ème cas : on cherche à calculer la période T . Pour simplifier prenons $-\pi < \theta_0 < 0$ et $\omega_0 = 0$. Que valent $\theta(\frac{T}{2})$ et $\theta'(\frac{T}{2})$? Montrer que

$$\theta'(t) = \sqrt{2(C + \cos \theta(t))}, \quad \forall 0 \leq t \leq \frac{T}{2},$$

puis que

$$T = 2 \int_{\theta_0}^{-\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(C + \cos \theta)}} = 4 \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{max})}},$$

où $\theta_{max} := -\theta_0 > 0$. Montrer qu'on a également

$$T = 2 \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_{max}}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}},$$

puis que, en utilisant le changement de variable $\sin \varphi = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_{max}}{2}}$,

$$T = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Que se passe t il pour T lorsque $\theta_{max} \rightarrow 0$? et quand $\theta_{max} \rightarrow \pi$?

Exercice 10.4.14. En électricité on s'intéresse à

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = v - h(i) \\ C \frac{dv}{dt} = -i, \end{cases}$$

où $L > 0$, $C > 0$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 . On définit l'énergie du système par

$$E(i, v) := \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2).$$

1. Déterminer l'équilibre et discuter sa stabilité en fonction de $h'(0)$ (qu'on suppose non nul).
2. Supposons que h vérifie $xh(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. Montrer que l'équilibre est globalement asymptotiquement stable.

Exercice 10.4.15. On considère

$$\begin{cases} x' = -xy \\ y' = \frac{x^2 - y}{1 + y^2}. \end{cases}$$

1. Déterminer les équilibres. L'étude de la "stabilité linéaire" suffit elle ?
2. A l'aide de $E(x, y) := x^2 + y^2 + \frac{1}{2}y^4$, montrer que toutes les solutions maximales du problème de Cauchy sont globales, et que $(0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

Troisième partie

ANNEXES

Annexe A

Rappels, compléments, choses utiles

A.1 Topologie

On travaille dans X un espace métrique, A est une partie de X .

Définition A.1.1 (Précompacité). *On dit que A est précompacte si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir A par un nombre fini de boules de rayon ε .*

Théorème A.1.2. *A est compacte si et seulement si elle est précompacte et complète.*

Définition A.1.3 (Relative compacité). *On dit que A est relativement compacte si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

- (i) A est contenue dans une partie compacte de X .
- (ii) l'adhérence de A est compacte.
- (iii) toute suite de A admet une sous suite qui converge dans X .

A.2 Théorème du point fixe de Banach-Picard

Théorème A.2.1 (Banach-Picard). *Soit E un métrique complet. Soit*

$$f : E \rightarrow E$$

contractante sur E , c'est à dire

$$\exists 0 \leq k < 1, \forall (x, y) \in E^2, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors f admet un unique point fixe, c'est à dire

$$\exists ! x^* \in E, f(x^*) = x^*.$$

A.3 Analyse fonctionnelle

Théorème A.3.1 (Ascoli). *Soit K un compact d'un espace métrique X et Y un espace métrique. Une partie $A \subset C(K, Y)$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) A est équicontinue en tout $x \in K$, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall f \in A, \forall y \in K, d_X(x, y) < \alpha \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

(ii) pour tout $x \in K$, $A(x) := \{f(x), f \in A\}$ est relativement compacte.

Notons que si Y est un espace vectoriel de dimension finie alors dans (ii) “relativement compacte” peut être remplacé par “bornée”.

Définition A.3.2 (Opérateur compact). Soit E et F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$. On dit que T est un opérateur compact si $T(B_E(0, 1))$, l'image de la boule unité fermée de E , est relativement compacte dans F .

On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F . On pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Exemple A.3.3 (Opérateur intégral). Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On se donne $K \in C([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{R})$. On considère $T : E \rightarrow E$ défini par

$$Tf(x) := \int_0^1 f(t)K(t, x)dx.$$

Montrer que T est un opérateur compact.

Théorème A.3.4 (Alternative de Fredholm). Soit E un espace de Banach et soit T un opérateur compacte de E . Alors

- (i) $\text{Ker}(Id - T)$ est de dimension finie.
- (ii) $\text{Im}(Id - T) = (\text{Ker}(Id - T^*))^\perp$.
- (iii) $Id - T$ est surjectif si, et seulement si, il est injectif.
- (iv) $\dim \text{Ker}(Id - T) = \dim \text{Ker}(Id - T^*)$.

Ce résultat fort s'inscrit dans la théorie de Riesz-Fredholm, cf [5] pour plus de détails. Il concerne la résolution de l'équation

$$u - Tu = f$$

où f est un “second membre” donné et u l'inconnue, et indique que

- soit, pour tout $f \in E$, il existe une unique solution $u \in E$.
- soit $u - Tu = 0$ a n solutions linéairement indépendantes et l'équation $u - Tu = f$ a une solution si et seulement si f vérifie n conditions d'orthogonalité.

Remarque A.3.5. En dimension finie on sait que injectif est équivalent à surjectif (et donc à bijectif). En dimension infinie, cela est faux : il suffit de considérer, par exemple, le “shift à droite” (injectif mais pas surjectif) et le “shift à gauche” (surjectif mais pas injectif) dans $\ell^2(\mathbb{N})$. La conclusion (iii) exprime donc une propriété remarquable des opérateurs de la forme $Id - T$ avec $T \in \mathcal{K}(E)$.

Bibliographie

- [1] M. Alfaro, *Dynamique des populations*, Cours de L3 biologie.
- [2] C. Becker, *Cours de Maths Spé XM'*, lycée Michel Montaigne, Bordeaux.
- [3] S. Benzoni-Gavage, *Calcul différentiel et équations différentielles*, Dunod, 2010.
- [4] F. Boyer, *Agrégation externe de Mathématiques, Equations différentielles ordinaires*, poly disponible sur <https://www.math.univ-toulouse.fr/fboyer/>
- [5] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, 1983.
- [6] R. Danchin, *Cours de calcul différentiel*, Cours de L3 maths, poly disponible sur <http://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/>
- [7] S. Raulot, *Cours de géo. diff.*
- [8] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. I.*, Springer-Verlag, New York, 1986.