Equations différentielles

M1, 2023-2024

Université de Rouen Normandie, LMRS

Matthieu Alfaro.

AVERTISSEMENT :

Ce poly est un document en construction, qui contient sûrement quelques coquilles voire erreurs et ne demande qu'à s'améliorer.

Ce poly est incomplet et aride à la lecture seule. Il prend son sens une fois complété par les explications, les reformulations, les dessins, les lemmes, les preuves, les exemples donnés en cours, et les exercices traités en TD.

Bref, ce poly n'est qu'un support...

Ce poly est librement inspiré de plusieurs cours préexistants, cf notamment [1], [2], [3] qu'on peut aller voir pour rentrer dans certains détails passés ici sous silence.

Table des matières

Chapitre 1

Des équations différentielles pour modéliser

Avertissement : jusqu'ici, en analyse, la variable était très souvent notée x et une fonction était très souvent notée f. On va maintenant s'intéresser à des équations différentielles où l'inconnue est une fonction qui doit vérifier une certaine égalité reliant la fonction et certaines de ses dérivées. Ces équations modélisent très souvent des phénomènes biologiques ou physiques et la variable sera donc notée t (le temps) ; quant à la fonction inconnue elle sera très souvent notée x si elle à valeurs réelles ($x(t)$ représente une grandeur physique, par exemple l'abscisse d'un mobile, ou un nombre d'individus en dynamique des populations... etc), ou X si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (par exemple $X(t) = (x(t), y(t))$ où $x(t)$ et $y(t)$ représentent un nombre d'individus de deux espèces en compétition, ou des proies et des prédateurs...). L'équation différentielle est souvent accompagnée d'une donnée initiale, c'est à dire la valeur de la fonction inconnue au temps initial (disons $t = 0$).

1.1 Dynamique d'une population

Au temps t on note $x(t)$ la taille d'une population. On suppose que, entre le temps t et le temps $t + dt$, l'accroissement de la population est proportionnel au temps écoulé dt et à $f(x(t))$, où f est une fonction de croissance. On a donc

$$x(t + dt) = x(t) + f(x(t))dt,$$

soit

$$\frac{x(t + dt) - x(t)}{dt} = f(x(t)).$$

En faisant $dt \to 0$, on obtient l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$x'(t) = f(x(t)).$$

En adjoignant une condition initiale, on obtient

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 > 0 \text{ donné} \end{cases}$$

qu'on appelle problème de Cauchy (=1 EDO +1 condition intiale).

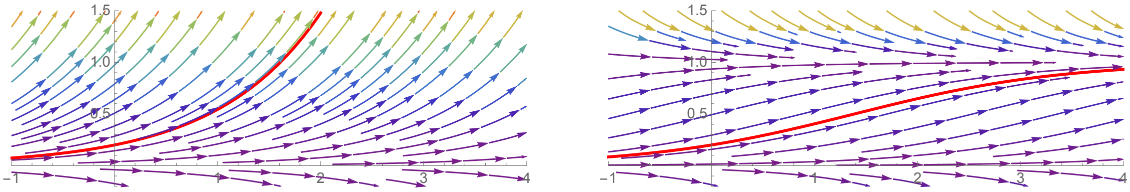

FIGURE 1.1 – A gauche : $x' = x$, en rouge la condition initiale $x(0) = 0.2$, cf Exemple 1.1.1. A droite : $x' = x(1-x)$, en rouge la condition initiale $x(0) = 0.2$, cf Exemple 1.1.2.

Exemple 1.1.1 (EDO linéaire autonome)**.** *Croissance linéaire $f(x) = rx$ avec r constante réelle. En anticipant un peu*

$$\text{la solution du pb de Cauchy } \begin{cases} x' = rx \\ x(0) = x_0 > 0 \text{ donné} \end{cases} \quad \text{est} \quad x(t) = x_0 e^{rt}.$$

Si $r < 0$, $x(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ (extinction). En revanche si $r > 0$, $x(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ (explosion), cf Figure 1.1 gauche.

Noter que, si $r > 0$, le seul zéro de la fonction de croissance linéaire est zéro. Noter aussi que, si $r > 0$, la fonction de croissance linéaire n'est pas majorée sur $[0, +\infty[$ signifiant que les ressources pour cette population sont illimitées. Cela n'est pas très réaliste et conduit à l'explosion.

Exemple 1.1.2 (EDO non linéaire autonome)**.** *Croissance logistique $f(x) = rx(1-x)$ avec $r > 0$ constante donnée. En anticipant un peu*

$$\text{la solution du pb de Cauchy } \begin{cases} x' = rx(1-x) \\ x(0) = x_0 > 0 \text{ donné} \end{cases} \quad \text{est} \quad x(t) = \frac{x_0 e^{rt}}{1 - x_0 + x_0 e^{rt}}.$$

On a $x(t) \to 1$ quand $t \to +\infty$ (survie avec saturation), cf Figure 1.1 droite. 1 est la capacité biotique (normalisée) de la population.

A noter que la fonction de croissance logistique est proche de rx lorsque x est voisin de zéro mais, quand x grandit, le terme $(1-x)$ agit comme une pénalisation, modélisant la compétition entre les individus pour les ressources disponibles. Noter enfin que $f(0) = 0$ mais aussi $f(1) = 0$...

Enfin, on peut imaginer que le taux de croissance ou la force de la compétition sont des grandeurs qui dépendent du temps (par exemple de manière périodique pour modéliser les saisons).

Exemple 1.1.3 (EDO non autonomes)**.** *Voici quelques modèles linéaires avec coefficients dépendant du temps*

$$x' = (2 + \cos t)x, \quad x' = (1 + t^2)x, \quad x' = 3x + b(t),$$

et quelques modèles non linéaires avec coefficients dépendant du temps

$$x' = (2 + \cos t)x(1-x), \quad x' = x(1 - (2 + \cos t)x)$$

qu'on discutera en cours.

1.2 Dynamique de deux populations

On considère ici deux populations mesurées par $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \geq 0$. On va écrire trois systèmes différentiels non linéaires pour trois situations différentes.

Exemple 1.2.1. *Ici $x(t)$ est une proie (des lièvres par ex.) et $y(t)$ son prédateur (des lynx par ex.). On peut modéliser cela par le système de Lotka-Volterra (normalisé) :*

$$\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = ry(-1+x) \end{cases} \qquad \textit{PROIE-PREDATEUR}$$

où $r > 0$ est une constante. En l'absence de prédateurs, les proies croissent linéairement ; le terme NON LINEAIRE $-xy$ représente la prédation (négative pour les proies !). En l'absence de proies, les prédateurs décroissent linéairement ; le terme NON LINEAIRE $+rxy$ représente la prédation (positive pour les prédateurs !).

Exemple 1.2.2. *Ici $x(t)$ et $y(t)$ sont deux populations (homme de Néandertal contre Homo sapiens ; écureuils invasifs contre écureuils indigènes...) et en compétition pour les ressources (la nourriture...). On peut modéliser cela par le système (normalisé) :*

$$\begin{cases} x' = x(1-x-\alpha y) \\ y' = ry(1-y-\beta x) \end{cases} \qquad \textit{COMPETITION}$$

où $\alpha > 0$, $r > 0$ et $\beta > 0$ sont des constantes. En l'absence de l'autre population, chaque population croît de manière logistique (termes $x(1-x)$ et $ry(1-y)$). De plus, par compétition, $x(t)$ "freine" $y(t)$ (terme $-\beta x$ dans la parenthèse) et $y(t)$ "freine" $x(t)$ (terme $-\alpha y$ dans la parenthèse). La question est "quelqu'un gagne t il la compétition ? si oui qui ?"...

Exemple 1.2.3. *Ici $x(t)$ et $y(t)$ sont deux populations qui s'entraident (termites et microorganismes digérant la cellulose, crocodiles et pluvians du Nil...). On peut modéliser cela par le système (normalisé) :*

$$\begin{cases} x' = x(1-x+\alpha y) \\ y' = ry(1-y+\beta x) \end{cases} \qquad \textit{SYMBIOSE, MUTUALISME}$$

où $\alpha > 0$, $r > 0$ et $\beta > 0$ sont des constantes. En l'absence de l'autre population, chaque population croît de manière logistique (termes $x(1-x)$ et $ry(1-y)$). De plus, par symbiose, $x(t)$ "aide" $y(t)$ (terme $+\beta x$ dans la parenthèse) et $y(t)$ "aide" $x(t)$ (terme $+\alpha y$ dans la parenthèse).

Les trois systèmes non linéaires ci dessus sont autonomes mais on peut évidemment imaginer que certains coefficients (un taux de croissance ou un taux de compétition par exemple) dépendent du temps...

1.3 En physique

On peut évidemment rencontrer des EDO où interviennent les dérivées d'ordre supérieur de la fonction inconnue. Par exemple, en mécanique, si $x(t)$ mesure la position d'un mobile alors la relation fondamentale de la dynamique conduit à des EDO où intervient l'accélération qui n'est autre que $x''(t)$.

Exemple 1.3.1. *(EDO linéaire autonome) Si on accroche une masse $m > 0$ (assimilée à un point) à un ressort de raideur $k > 0$, alors la position $x(t)$ de la masse est régie par l'EDO du second ordre*

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0,$$

qui devient un problème de Cauchy si on adjoint la position initiale $x(0)$ ET la vitesse initiale $x'(0)$. Si $x(0) = x'(0) = 0$ il ne se passe rien, sinon ça "oscille"...

Exemple 1.3.2. *(EDO non linéaire autonome) L'équation du pendule simple est*

$$\theta'' + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0,$$

qui devient un problème de Cauchy si on adjoint l'angle initial $\theta(0)$ ET la vitesse angulaire initiale $\theta'(0)$.

Evidemment on peut aussi avoir des coefficients qui dépendent du temps.

1.4 Un cadre théorique

Notons qu'une écriture "unifiée" pour les EDO rencontrées en Sections 1.1 et 1.2 est

$$X' = f(t, X), \tag{1.1}$$

où X est la fonction inconnue, de la variable réelle t, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (par ex. pour une population $n = 1$ et on note alors plutôt x, mais pour deux populations $n = 2$ et on note $X = (x, y)$...), et f une fonction de la variable temporelle t et de la variable d'état X. Si f ne dépend pas de t alors l'EDO

$$X' = f(X)$$

est dite <u>autonome</u>.

D'autre part les deux exemples de la Section 1.3 sont des "EDO du second degré avec inconnue à valeurs réelles" mais qu'on peut (cf cours) les écrire comme des "EDO du premier ordre avec inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$".

Ainsi, quitte à payer sur la taille de la solution, on pourra toujours abaisser le degré d'une EDO pour la mettre sous la forme (1.1), forme pour laquelle nous aurons besoin d'une théorie générale (cf Chapitre 2)...

Le cadre est donc le suivant :

On se donne un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$). On se donne une fonction

$$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

• On s'intéresse à l'EDO

$$X' = f(t, X). \tag{1.2}$$

Une solution de l'EDO (1.2) est un COUPLE (J, X) où $J \subset I$ est un intervalle (d'intérieur non vide) ET $X : J \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable telle que, pour tout $t \in J$ on a $X'(t) = f(t, X(t))$ (noter l'aspect local).

Définition 1.4.1. *Soient (J_1, X_1) et (J_2, X_2) deux solutions. On dit que (J_2, X_2) est un <u>prolongement</u> de (J_1, X_1) si*

$$J_1 \subset J_2 \text{ et } X_1 = X_2 \text{ sur } J_1.$$

On dit que (J, X) est une <u>solution maximale</u> si elle n'est pas (strictement) prolongeable.

On dit que (J, X) est une <u>solution globale</u> si $J = I$.

• Pour $t_0 \in I$ et $X_0 \in \Omega$, on s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Une solution du problème de Cauchy (1.3) est un COUPLE (J, X) où $J \subset I$ est un intervalle (d'intérieur non vide) contenant t_0 ET $X : J \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable telle que, pour tout $t \in J$ on ait $X'(t) = f(t, X(t))$ (noter l'aspect local) et $X(t_0) = X_0$.
L'espoir est d'avoir, sous des hypothèse raisonnables, existence et unicité d'une solution maximale pour le problème de Cauchy. Il va s'agir des théorèmes dits de Cauchy-Lipschitz.

Chapitre 2

Théorème de Cauchy-Lipschitz

2.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

On se donne donc un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. On se donne une fonction
$$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n.$$
On s'intéresse à l'EDO
$$X' = f(t, X). \tag{2.1}$$
Une solution de l'EDO (2.1) est un COUPLE (J, X) où $J \subset I$ est un intervalle (d'intérieur non vide) ET $X : J \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable telle que, pour tout $t \in J$ on a $X'(t) = f(t, X(t))$ (noter l'aspect local).

Définition 2.1.1. *Soient (J_1, X_1) et (J_2, X_2) deux solutions. On dit que (J_2, X_2) est un prolongement de (J_1, X_1) si*
$$J_1 \subset J_2 \text{ et } X_1 = X_2 \text{ sur } J_1.$$
On dit que (J, X) est une solution maximale si elle n'est pas (strictement) prolongeable.
On dit que (J, X) est une solution globale si $J = I$.

Pour $t_0 \in I$ et $X_0 \in \Omega$, on s'intéresse au problème de Cauchy
$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \tag{2.2}$$
Une solution du problème de Cauchy (2.2) est un COUPLE (J, X) où $J \subset I$ est un intervalle (d'intérieur non vide) contenant t_0 ET $X : J \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable telle que, pour tout $t \in J$ on ait $X'(t) = f(t, X(t))$ (noter l'aspect local) et $X(t_0) = X_0$.

Définition 2.1.2. *Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^p$, avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, et $p \geq 1$.*

On dit que f est lipschitzienne par rapport à la variable d'état X sur $I \times \Omega$ si on peut trouver un réel $k \geq 0$ tel que
$$\|f(t, X_1) - f(t, X_2)\| \leq k\|X_1 - X_2\|, \quad \forall t \in I, \forall (X_1, X_2) \in \Omega^2.$$
On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à la variable X sur $I \times \Omega$ si pour tout point (t_0, X_0) dans $I \times \Omega$ on peut trouver un voisinage de ce point tel que f soit lipschitzienne par rapport à la variable X sur ce voisinage : pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \Omega$, il existe $\varepsilon = \varepsilon_{t_0, X_0} > 0$ et $k = k_{t_0, X_0} \geq 0$ tels que
$$\|f(t, X_1) - f(t, X_2)\| \leq k\|X_1 - X_2\|, \quad \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[, \forall (X_1, X_2) \in B(X_0, \varepsilon).$$

Exemple 2.1.3. *Quid de* $x \mapsto x$ *sur* $\mathbb{R}$ *?* $x \mapsto x^2$ *sur* $\mathbb{R}$ *?* $x \mapsto \sqrt{x}$ *sur* $[0, +\infty[$ *(qui certes n'est pas ouvert) ?* $(t, x) \mapsto tx$ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *?* $(t, x) \mapsto t^2 + \arctan x$ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *?*

Exemple 2.1.4. *Si* f *est de classe* C^1 *sur* $I \times \Omega$ *alors elle est localement lipschitzienne par rapport à* X.

Voici le résultat fondamental concernant l'existence et l'unicité de la solution maximale du problème de Cauchy (2.2).

Théorème 2.1.5 (de Cauchy-Lipschitz). *Soit* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$. *Soit* $t_0 \in I$. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Soit* $X_0 \in \Omega$. *Soit* $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à* X *sur* $I \times \Omega$.

Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale (J, X), *et* J *est un intervalle ouvert. De plus, cette solution est de classe* C^1 *sur* J.

Preuve. La preuve repose sur la mise du problème de Cauchy sous forme intégrale, et se fait en trois temps : les Lemmes 2.1.6, 2.1.7, 2.1.8.

Lemme 2.1.6 (Existence locale). *Il existe* $\varepsilon > 0$ *et* $X : \underbrace{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}_{=:J} \to \Omega$ *tel que* (J, X) *est solution de problème de Cauchy.*

Lemme 2.1.7 (Unicité locale). *Si* $(\tilde{J}, \tilde{X})$ *est une autre solution du problème de Cauchy, alors il existe* $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ *tel que* $\tilde{X} \equiv X$ *sur* $]t_0 - \tilde{\varepsilon}, t_0 + \tilde{\varepsilon}[$.

Lemme 2.1.8 (Unicité, du local vers le maximal). *Si* (J_1, X_1) *et* (J_2, X_2) *sont deux solutions du problème de Cauchy avec* J_1 *et* J_2 *ouverts, alors* $X_1 \equiv X_2$ *sur* $J_1 \cap J_2$.

La conclusion se fait ainsi : grâce aux Lemmes 2.1.6 et 2.1.7 on peut, en "recollant" toutes les solutions locales, construire une solution maximale (J^*, X^*) qui prolonge toutes les solutions locales. De plus, J^* est forcément ouvert (sinon on peut, grâce aux Lemmes 2.1.6 et 2.1.7, prolonger strictement (J^*, X^*) niant ainsi son caractère maximal). Enfin, l'unicité de la solution maximale est fournie par le Lemme 2.1.8. □

Le Lemme 2.1.7 est une conséquence assez directe du Lemme de Grönwall qui, supposant une estimation implicite dite *a priori*, fournit une estimation explicite.

Lemme 2.1.9 (Lemme de Grönwall). *Soit* $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$ *continue et à valeurs positives. Si* $x : [a, b[\to \mathbb{R}$ *continue vérifie, pour une constante* $C \geq 0$,

$$x(t) \leq C + \int_a^t \varphi(s) x(s) ds, \quad \forall a \leq t < b,$$

alors

$$x(t) \leq C e^{\int_a^t \varphi(s) ds}, \quad \forall a \leq t < b.$$

2.2 Premières conséquences

On se place ici sous les hypothèses du Théorème 2.1.5 de Cauchy Lipschitz qui implique, entre autres, que :
• une solution maximale est définie sur un intervalle ouvert.
• deux trajectoires distinctes ne peuvent pas se couper (cf Figure 1.1) : si (J, X_1) et (J, X_2) sont deux solutions de l'EDO (2.1) et s'il existe $t_0 \in J$ tel que $X_1(t_0) = X_2(t_0)$ alors $X_1 = X_2$ sur J.
• dans $\mathbb{R}$ (ici $n = 1$) les trajectoires sont ordonnées (cf Figure 1.1) : si (J, x_1) et (J, x_2) sont deux solutions de l'EDO (2.1) et s'il existe $t_0 \in J$ tel que $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ alors $x_1(t) < x_2(t)$ pour tout $t \in J$.

On peut ainsi justifier certains calculs formels faits au Chapitre 1. Par exemple, prenons une équation autonome

$$x' = f(x),$$

avec $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $l \in \Omega$ est un zéro de f, cad $f(l) = 0$, alors la fonction constante égale à l est une solution globale de l'EDO $x' = f(x)$, on dit que l est un équilibre de l'EDO. Par suite la solution maximale du problème de Cauchy avec donnée initiale différente de l ne prendra jamais la valeur l.

Exemple 2.2.1. *La solution maximale du problème de Cauchy $x' = x$, $x(0) = x_0$ avec $x_0 \neq 0$ ne s'annule jamais. On peut donc écrire $\frac{x'}{x} = 1$ puis intégrer...*

Exemple 2.2.2. *La solution maximale du problème de Cauchy $x' = x(1-x)$, $x(0) = x_0$ avec $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq 1$ ne s'annule jamais et ne vaut jamais 1. On peut donc écrire $\frac{x'}{x(1-x)} = 1$ puis intégrer...*

Le Théorème 2.1.5 de Cauchy Lipschitz permet également de donner des propriétés de la solution maximale.

Exemple 2.2.3. *Pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, montrer que la solution maximale du problème de Cauchy $x' = tg(x)$, $x(0) = 1$ est définie sur un intervalle J symétrique par rapport à zéro, et qu'elle est paire.*

2.3 Explosion en temps fini

Le Théorème 2.1.5 de Cauchy Lipschitz fournit une solution maximale définie sur $J \subset I$ et est donc un résultat *local* : rien n'indique que la solution maximale est *globale.*

Exemple 2.3.1 (Solution non globale)**.** *La solution maximale du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

se calcule, $x(t) = \frac{1}{1-t}$, et n'est définie que sur $]-\infty, 1[$. On a explosion en temps fini : $x(t) \to +\infty$ quand $t \to 1^-$, cf Figure 2.1.

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$ la situation de l'exemple ci dessus est "générique".

Théorème 2.3.2 (Explosion en temps fini)**.** *Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état X. Soit $(J =]\alpha, \beta[, X)$ une solution maximale de $X' = f(t, X)$. Alors*

1. *si $\beta < \sup I$ alors $\lim_{t \to \beta^-} \|X(t)\| = +\infty$.*

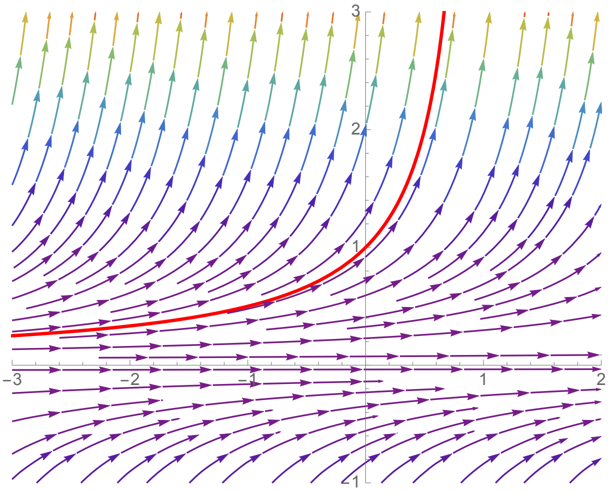

FIGURE 2.1 – $x' = x^2$, en rouge la condition initiale $x(0) = 1$, cf Exemple 2.3.1.

2. *si* $\inf I < \alpha$ *alors* $\lim_{t\to\alpha^+} \|X(t)\| = +\infty$.

Par contraposée, le Théorème 2.3.2 nous dit parfois que la solution maximale est globale : par exemple si f est bornée $I \times \mathbb{R}^n$, cf Exercice 2.4.7.

Exemple 2.3.3. *Soit le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = e^{-tx} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Sa solution maximale x est définie sur un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ contenant 0. Supposons $\beta < +\infty$ et montrons qu'on peut prolonger au delà de β. Déjà $x' = e^{-tx} > 0$ donc x est croissante sur $]\alpha, \beta[$. Comme $x(0) = 0$, x est positive sur $[0, \beta[$. Par suite $x' = e^{-tx} \leq 1$ donc, par intégration $x(t) \leq t$, tout ceci sur $[0, \beta[$. Ainsi x est croissante et majorée (par β) sur $[0, \beta[$, ce qui contredit le Théorème 2.3.2 d'explosion en temps fini. Par suite $\beta = +\infty$. De la même façon, $\alpha = -\infty$ et la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.3.4 (de Cauchy Lipschitz global)**.** *Si $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue et (globalement) lipschitzienne par rapport à X, alors les solutions maximales de $X' = f(t, X)$ sont globales.*

Signalons enfin que, lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ la notion d'explosion en temps fini est remplacée par la notion de "sortie de tout compact en temps fini".

Théorème 2.3.5 (Sortie de tout compact)**.** *Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état X. Soit $(J =]\alpha, \beta[, X)$ une solution maximale de $X' = f(t, X)$. Alors*

1. *si $\beta < \sup I$ alors X sort de tout compact de Ω au voisinage de β : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$X(t) \notin K, \forall t \in]\beta - \varepsilon, \beta[.$$

2. *si* $\inf I < \alpha$ *alors conclusion "similaire".*

Exemple 2.3.6. *Application au problème de Cauchy $x' = -\frac{1}{x}$, $x(0) = 1$.*

2.4 Exercices

Des cas où on peut calculer...

Exercice 2.4.1. *Calculer la solution maximale du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2.4.2. *Trouver la solution maximale des problèmes suivants*

$$\begin{cases} x' = 3t^2x^2 \\ x(1) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 3t^2x^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 2.4.3. *Résoudre sur un intervalle à préciser*

$$\begin{cases} xx' = \frac{1}{2} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 2.4.4. *Justifier que la solution maximale de*

$$\begin{cases} x' = |x| \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

ne peut s'annuler, puis la trouver.

Exercice 2.4.5. *On considère le modèle de population de Gompertz, dans lequel l'évolution de la population $N(t)$ considérée est décrite par l'équation $N'(t) = rN(t)\ln N(t)$, où r est une constante donnée. Donner une expression de la population en fonction de la population initiale $N(0) = N_0 > 0$.*

Exercice 2.4.6. *Montrer que, pour tout $\alpha \geq 0$, la fonction*

$$x_\alpha(t) := \begin{cases} 0 & si\ t < \alpha \\ (t-\alpha)^2 & si\ t \geq \alpha, \end{cases}$$

est solution globale d'un même problème de Cauchy. Pourquoi n'est ce pas en contradiction avec le Théorème 2.1.5 de Cauchy-Lipschitz ?

Etudes qualitatives

Exercice 2.4.7. *Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ et localement lipschitzienne par rapport à X. On s'intéresse au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

On suppose que f est bornée sur $I \times \mathbb{R}^n$. Montrer alors que la solution maximale est globale, cad définie sur I tout entier (raisonner par l'absurde, utiliser la formulation intégrale, et conclure grâce au théorème d'explosion en temps fini).

Exercice 2.4.8. *Montrer que le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t^2+1} e^{-x^2 \sin^2 t} \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

admet une unique solution maximale, puis que celle ci est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (utiliser l'Exercice 2.4.7). Montrer que, lorsque $t \to +\infty$, $x(t)$ tend vers un réel l, et que $1 \leq l \leq 1 + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.4.9. *On considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = t^2 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

1. *Justifier l'existence d'une unique solution maximale x.*
2. *Montrer que x est une fonction impaire et de classe C^∞.*
3. *Etudier la monotonie et la convexité de x.*
4. *On suppose x définie sur $[0, +\infty[$. Montrer que $\frac{x'(t)}{1+x^2(t)} \geq 1$ pour tout $t \geq 1$. Montrer, en intégrant, que c'est impossible. En déduire que x est définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$.*
5. *Dresser le tableau de variation de x.*

Exercice 2.4.10. *On considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \cos(tx) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

1. *Justifier l'existence d'une unique solution maximale x.*
2. *En observant que*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \cos(sx(s))ds$$

montrer que x est définie sur $\mathbb{R}$ entier.

Exercice 2.4.11. *On prend $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on suppose que $\frac{1}{f} \in L^1(\mathbb{R})$, cad*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f(u)} du < +\infty.$$

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ donné montrer que la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

est définie sur $]-T_{min}, T_{max}[$ avec T_{min} et T_{max} deux réels positifs à préciser (en fonction de la non linéarité f et de la donnée initiale x_0). Donner des exemples d'application.

Exercice 2.4.12 (Variation sur les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (la première variable représente le temps, mais U n'est pas nécessairement le produit d'un intervalle par un ouvert) et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. Soit $(t_0, x_0) \in U$. On considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

1. *Montrer qu'il existe un intervalle ouvert* I *contenant* t_0 *et une fonction dérivable* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *tels que*
   (a) $\varphi(t_0) = X_0$,
   (b) $\forall t \in I, (t, \varphi(t)) \in U$,
   (c) $\forall t \in I, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.
2. *Soit* J *un autre intervalle ouvert contenant* t_0 *et* $\psi : J \to \mathbb{R}^n$, *dérivable, vérifiant les trois conditions de la question précédente. Montrer que* $\varphi_{|I\cap J} = \psi_{|I\cap J}$ *(on pourra considérer* t_1, *le plus grand* $t \geq t_0$ *dans* $I \cap J$ *tel que* $\varphi(t) = \psi(t)$ *et appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz "usuel" au voisinage de ce point).*
3. *En déduire que le problème de Cauchy possède une unique solution maximale.*

Exercice 2.4.13. *On considère la fonction* $(t, x) \mapsto \frac{1}{1+tx}$ *définie sur l'ouvert*

$$U = \{(t, x), tx \neq -1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. *En utilisant l'exercice précédent, montrer que le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' & = \frac{1}{1+tx} \\ x(0) & = 0 \end{cases}$$

   possède une solution maximale unique x.
2. *Montrer que cette solution* x *est impaire et croissante.*
3. *Montrer, en considérant* $\int_0^t x'(s)ds$, *que* x *est définie sur* $\mathbb{R}$ *entier.*
4. *Justifier l'existence d'une limite* $l = \lim_{t\to+\infty} x(t)$, *où* $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
5. *Montrer, en considérant* $\int_0^t x'(s)ds$, *que* $l = +\infty$.

Exercice 2.4.14. *On considère l'EDO*

$$(E) : \qquad x' = t + x^2$$

1. *Quel est le lieu des points où les solutions de (E) présentent une tangente horizontale ?*
2. *Décrire le lieu des points d'inflexion.*

Exercice 2.4.15. *On considère l'équation différentielle*

$$(E) : \qquad tx' = t + x^2 \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

1. *Soit* $x_1 \in \mathbb{R}$, *montrer qu'il existe une unique fonction* x *définie sur un intervalle* $J =]\alpha, \beta[\subset]0, +\infty[$ *contenant* 1, *solution maximale de l'équation différentielle* (E) *et vérifiant* $x(1) = x_1$.
2. *Montrer que,*

$$\forall t \in [1, \beta[, \quad \frac{x'(t)}{1 + x(t)^2} \geq \frac{1}{t}.$$

   Montrer, en intégrant cette inégalité, que $\beta < +\infty$.
3. *Etudier le comportement d'une solution maximale aux bornes de l'intervalle* $]\alpha, \beta[$. *On distinguera les possibilités* $\alpha = 0$ *et* $\alpha > 0$.

Chapitre 3

Equations différentielles linéaires

On reprend ici le cadre du chapitre précédent, à savoir $X' = f(t, X)$, mais on s'intéresse au cas où
$$f(t, X) = \mathcal{A}(t)X + B(t),$$
avec $t \in I$, $\mathcal{A}(t)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (ou, par extension, une matrice carrée de taille n), $B(t)$ un vecteur de taille n (ou, par extension, une matrice colonne de hauteur n). On dit alors que l'équation différentielle est linéaire (même si on devrait dire affine). Il s'avère que, en supposant simplement la continuité de $t \mapsto \mathcal{A}(t)$ et de $t \mapsto B(t)$, le théorème 2.1.5 de Cauchy-Lipschitz s'applique et que, en cadeau bonus, la solution maximale est globale ! Un deuxième avantage est que, contrairement aux équations non linéaires, on sait décrire la structure de l'ensemble des solutions de l'EDO et on a, dans quelques cas, des stratégies "définitives" pour calculer les solutions de l'EDO ou la solution d'un problème de Cauchy linéaire...

3.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Théorème 3.1.1 (de Cauchy-Lipschitz linéaire). *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in I$. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{A} : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ deux applications continues sur I.*

Alors le problème de Cauchy linéaire
$$\begin{cases} X' = \mathcal{A}(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \tag{3.1}$$
admet une unique solution maximale qui, de plus, est globale.

Notons que l'EDO $X' = \mathcal{A}(t)X + B(t)$ peut s'écrire sous la forme d'un système :
$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{cases}$$
où $\mathcal{A}(t) = (a_{ij}(t))_{i\leq i,j\leq n}$, $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$.

3.2 L'espace affine des solutions

A l'équation

$$(E): \quad X' = \mathcal{A}(t)X + B(t),$$

on associe l'équation dite homogène

$$(H): \quad X' = \mathcal{A}(t)X.$$

Alors

1. L'ensemble des solutions de (H) est un sous espace vectoriel de dimension n de $C^1(I)$. Pour le déterminer, il nous faut donc n solutions $V_1, \ldots, V_n$ linéairement indépendantes.
2. On cherche *une* solution Z de (E) ; on parle d'une solution particulière de (E). Dans les cas les plus favorables, on "voit" une solution particulière évidente ; sinon on peut utiliser la méthode de variation des constantes...
3. **Les solutions de l'équation (E) sont alors obtenues en sommant les solutions de l'équation homogène (H) et la solution particulière Z trouvée.**
4. Enfin, si on cherche à résoudre le problème de Cauchy (3.1), il faut, parmi toutes les solutions de (E) obtenues au point 3., sélectionner celle qui vérifie la condition initiale $X(t_0) = X_0$, en ajustant les n constantes qui étaient "libres".

Exemple 3.2.1. *Résoudre le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = tx - t \\ x(0) = 3. \end{cases}$$

Il faut bien comprendre que tout cela est "théorique" car, en général, dès le point 1. on ne sait pas trouver les $V_1, \ldots, V_n$!!!!

Il y a cependant quelques cas favorables que nous étudions en détails ci-dessous.

3.3 Equations linéaires scalaires $(n = 1)$

On se place ici dans le cadre des fonctions à valeurs réelles, cad $n = 1$, et on utilise les notations $\mathcal{A}(t) = a(t)$, $B(t) = b(t)$ et $X(t) = x(t)$.

3.3.1 Ordre 1

On rappelle ici comment on résout l'équation différentielle du premier ordre

$$(E): x' = a(t)x + b(t),$$

où $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ sont continues.

1. Les solutions de l'équation homogène

$$(H): x' = a(t)x$$

sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ où A est une primitive de a sur I et λ un réel arbitraire.

2. Si on n'a pas de solution particulière évidente de (E) alors on en cherche une sous la forme
$$z(t) = \lambda(t)e^{A(t)} \quad \text{(méthode de variation de la constante).}$$
En traduisant que z est solution particulière on obtient $\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$ et on choisit donc $\lambda(t) = \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds$. Une solution particulière est donc donnée par
$$z(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds.$$
3. Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme :
$$t \mapsto \lambda e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds,$$
où $\lambda \in \mathbb{R}$ est arbitraire.
4. Si on veut résoudre le problème de Cauchy avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ on doit avoir $\lambda = e^{-A(t_0)}x_0$ et la solution est donc
$$t \mapsto x_0 e^{A(t)-A(t_0)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds.$$

Exemple 3.3.1. *Résoudre les problèmes de Cauchy suivants*
$$\begin{cases} x' = \frac{2}{t}x \\ x(1) = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -\frac{t^2+1}{t}x \\ x(1) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \frac{t}{t^2-1}x + 1 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

3.3.2 Ordre 2

On cherche ici à résoudre l'EDO linéaire du second ordre
$$(E) : x'' + u(t)x' + v(t)x = w(t),$$
où $u, v, w : I \to \mathbb{R}$ sont continues.

Souvenons nous qu'en posant $y(t) = x'(t)$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ on ramène l'équation différentielle scalaire du second ordre (E) à l'équation linéaire du premier ordere (en payant sur la taille de la solution, maintenant égale à 2)
$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -v(t) & -u(t) \end{pmatrix}}_{=\mathcal{A}(t)} X + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ w(t) \end{pmatrix}}_{=B(t)},$$
et on sait que le Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire s'applique. Notons encore que pour faire de (E) un problème de Cauchy, il faut imposer la valeur de x ET de x' en un point $t_0 \in I$, soit
$$\begin{cases} x'' + u(t)x' + v(t)x = w(t) \\ x(t_0) \text{ donné} \\ x'(t_0) \text{ donné.} \end{cases}$$

1. Equation homogène (H) **:** $x'' + u(t)x' + v(t)x = 0$

Les solutions de l'équation homogène

$$(H) : x'' + u(t)x' + v(t)x = 0,$$

forment un espace vectoriel de dimension 2. Autrement dit si h_1 et h_2 sont deux solutions linéairement indépendantes alors toutes les solutions sont de la forme $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$ avec λ_1 et λ_2 des réels arbitraires. En général on n'est pas capables de déterminer h_1 et h_2... Citons cependant 2 cas favorables :

• **L'équation est à coefficients constants :**

$$(H) : x'' + ux' + vx = 0,$$

avec u et v deux réels donnés. *L'équation caractéristique associée est* :

$$P(r) = r^2 + ur + v = 0.$$

Notons Δ son discriminant. On a les trois cas :

— Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes notées r_1 et r_2. Les solutions de (H) sont alors les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},$$

où λ_1, λ_2 sont deux constantes réelles.

— Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique a une racine réelle double notée r_0. Les solutions de (H) sont alors les fonctions de la forme

$$t \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{r_0 t},$$

où λ_1, λ_2 sont deux constantes réelles.

— Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines complexes distinctes et conjuguées, disons $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, avec α et β réels. Les solutions de (H) sont alors les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos \beta t + \lambda_2 \sin \beta t),$$

où λ_1, λ_2 sont deux constantes réelles.

Exemple 3.3.2. *Résoudre* $x'' + 2x' - 3x = 0$, $x'' + 2x' + x = 0$, $x'' - 2x' + 2x = 0$.

• **On a la chance de connaître une solution** h **de** (H) car elle est évidente ou car on a travaillé avec des séries entières ou car je ne sais quoi... Alors la technique est la suivante : on cherche une deuxième solution sous la forme $x = zh$. En injectant dans l'équation on obtient que x est solution de (H) si z' est solution d'une équation différentielle scalaire du premier ordre. On résout cette équation pour déterminer z' puis, par intégration, on détermine z ; ainsi on dispose d'une deuxième solution $x = zh$ et donc de notre base de l'espace des solutions.

Exemple 3.3.3. *Résoudre sur* $]0, +\infty[$ *l'équation* $x'' - x' + \frac{1}{t}x = 0$. *On remarque que* $h_1 : t \mapsto t$ *est solution évidente. On pose* $x(t) = tz(t)$. *On obtient* $x'' - x' + \frac{1}{t}x = tz'' + (2-t)z'$. *Par résolution de l'équation* $tv' + (2-t)v = 0$ *on obtient* $z'(t) = \frac{e^t}{t^2}$ *; on choisit donc* $z(t) = \int_1^t \frac{e^u}{u^2}du$. *Ainsi on a une deuxième solution* $h_2 : t \mapsto t\int_1^t \frac{e^u}{u^2}du$. *Les solutions sont donc les fonctions de la forme* $t \mapsto \lambda_1 t + \lambda_2 t\int_1^t \frac{e^u}{u^2}du$.

2. Solution particulière de $(E) : x'' + u(t)x' + v(t)x = w(t)$

Comme d'habitude si on a une solution particulière évidente on s'en saisit ! Sinon on en en cherche une sous la forme $z = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$ où λ_1 et λ_2 ne sont plus des constantes mais des fonctions. On IMPOSE la condition $\lambda_1' h_1 + \lambda_2' h_2 = 0$. Dans ces conditions on obtient que z est solution si $\lambda_1' h_1' + \lambda_2' h_2' = w$. En résolvant le système

$$\begin{cases} h_1\lambda_1' + h_2\lambda_2' = 0 \\ h_1'\lambda_1' + h_2'\lambda_2' = w, \end{cases}$$

on détermine (λ_1', λ_2') puis, après intégration, (λ_1, λ_2) ce qui donne donc la solution particulière $z = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$.

Exemple 3.3.4. *Résolvons sur* $]0, +\infty[$ *l'équation* $(E) : t^2 x'' - 2tx' + 2x = 2 + 2t^3 \sin t$.

On remarque que $h_1 : t \mapsto t$ *et* $h_2 : t \mapsto t^2$ *sont 2 solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène dont les solutions sont donc de la forme* $t \mapsto \alpha t + \beta t^2$*, avec* α *et* β *des réels arbitraires.*

Cherchons une solution particulière à (E) *sous la forme*

$$z(t) = \alpha(t)t + \beta(t)t^2.$$

On aboutit alors au système

$$\begin{cases} t\alpha'(t) + t^2\beta'(t) = 0 \\ \alpha'(t) + 2t\beta'(t) = \frac{2}{t^2} + 2t\sin t. \end{cases}$$

Sa résolution conduit à $\alpha'(t) = -\frac{2}{t^2} - 2t\sin t$ *et* $\beta'(t) = \frac{2}{t^3} + 2\sin t$*. En primitivant (besoin d'une IPP pour* α*) on a* $\alpha(t) = \frac{2}{t} - 2\sin t + 2t\cos t$ *et* $\beta(t) = -\frac{1}{t^2} - 2\cos t$*, d'où une solution particulière donnée par* $x_0(t) = (\frac{2}{t} - 2\sin t + 2t\cos t)t + (-\frac{1}{t^2} - 2\cos t)t^2 = 1 - 2t\sin t$.

Bilan : les solutions sont données par

$$x(t) = \alpha t + \beta t^2 + 1 - 2t\sin t.$$

Remarque 3.3.5. *Lorsque l'équation est à coefficients constants et que le second membre est "sympathique", on sait sous quelle forme chercher une solution particulière. Ainsi, face à*

$$(E) : ax'' + bx' + cx = d(t),$$

avec $a \neq 0$*,* b *et* c *des réels donnés, on note* $P(r) = ar^2 + br + c$ *et le tableau suivant (qu'il ne faut pas apprendre !) nous indique sous quelle forme chercher une solution particulière.*

Second membre $d(t)$	*Solution particulière*
Polynôme de degré q *ET* $c \neq 0$	*polynôme de degré* q
Polynôme de degré q *ET* $c = 0$	*polynôme de degré* $q+1$
$Ae^{\alpha t}$ *ET* α *non racine de* P	$Ce^{\alpha t}$
$Ae^{\alpha t}$ *ET* α *racine simple de* P	$Cte^{\alpha t}$
$Ae^{\alpha t}$ *ET* α *racine double de* P	$Ct^2e^{\alpha t}$
$A\cos(mt) + B\sin(mt)$ *ET* im *non racine de* P	$C\cos(mt) + D\sin(mt)$
$A\cos(mt) + B\sin(mt)$ *ET* im *racine de* P	$Ct\cos(mt) + Dt\sin(mt)$

où C *et* D *sont des constantes à déterminer.*

Exemple 3.3.6. *Résoudre* $x'' + x = \sin(2t)$.

3.4 Systèmes linéaires ($n \geq 2$) à coefficients constants

On suppose ici $n \geq 2$ et que $\mathcal{A} : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est constante. On s'intéresse donc à l'équation

$$X' = \mathcal{A}X + B(t),$$

où $\mathcal{A}$ est une matrice (constante) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et où $B : I \to \mathbb{R}^n$ est continue.

Petit rappel d'algèbre linéaire : on peut définir l'exponentielle d'une matrice. On prouve que $e^{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{A}$ commutent, que $e^{\mathcal{A}}$ est inversible d'inverse $e^{-\mathcal{A}}$. On prouve également que $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dérivable de dérivée $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{A}e^{t\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.4.1 Equation homogène (H) : $X' = \mathcal{A}X$

Théorème 3.4.1 (Résolution de $X' = \mathcal{A}X$). *Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $X' = \mathcal{A}X$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^{t\mathcal{A}}C$ où $C \in \mathbb{R}^n$ est arbitraire.*

Preuve. Si X est solution alors $(e^{-t\mathcal{A}}X)' = -\mathcal{A}e^{-t\mathcal{A}}X + e^{-t\mathcal{A}}X' = e^{-t\mathcal{A}}(-\mathcal{A}X + X') = 0$ donc $e^{-t\mathcal{A}}X$ est une colonne constante C puis $X = e^{t\mathcal{A}}C$. Réciproquement on vérifie que ces fonctions conviennent. $\square$

Pour résoudre l'équation homogène il "suffit" donc de calculer $e^{t\mathcal{A}}$. Des outils existent pour cela (décomposition de Dunford-Jordan par exemple) et on renvoie au cours d'algèbre linéaire. On va simplement considérer ici le cas très favorable où $\mathcal{A}$ est diagonalisable, ce qui permet de se ramener à calculer des exponentielles de *réels*, ce qui est bien plus agréable.

Commençons par observer que si $\mathcal{D} = \text{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est une matrice diagonale alors $e^{t\mathcal{D}} = \text{Diag}(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t})$ et donc

$$X(t) = \Big(x_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, ..., x_n(t) = \alpha_n e^{\lambda_n t}\Big) \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n.$$

De toute façon, dans ce cas, le système différentiel $X' = \mathcal{D}X$ est constituée de n équations différentielles linéaires *découplées* $(1 \leq i \leq n)$

$$x_i' = \lambda_i x_i,$$

qui se résolvent tranquillement en $(1 \leq i \leq n)$

$$x_i(t) = \alpha_i e^{\lambda_i t}, \quad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Si $\mathcal{A}$ est diagonalisable alors, en changeant de base, on se ramène à un tel découplage.

Corollaire 3.4.2 (Cas très favorable : $\mathcal{A}$ est diagonalisable). *Si $\mathcal{A}$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres réelles et $X_1, \ldots, X_n$ les vecteurs propres réels associés. Alors les solutions sur $\mathbb{R}$ de $X' = \mathcal{A}X$ sont les fonctions de la forme*

$$t \mapsto \alpha_1 \underbrace{e^{t\lambda_1} X_1}_{=V_1(t)} + \cdots + \alpha_n \underbrace{e^{t\lambda_n} X_n}_{=V_n(t)}$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels arbitraires.

Exemple 3.4.3. *On résout*

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y. \end{cases}$$

Les valeurs propres de $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ sont 1 et -1 associées à $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Les solutions sont donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Il peut aussi être utile “d’aller faire un tour dans $\mathbb{C}$”, puis de “revenir dans $\mathbb{R}$” à la fin... Par exemple si $n = 2$, supposons que la matrice réelle $\mathcal{A}$ soit diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Notons θ_1, θ_2 ses deux valeurs propres complexes *conjuguées* et Z_1, Z_2 les vecteurs propres complexes *conjugués* associés. Alors les solutions à valeurs $\mathbb{C}^2$ (temporairement) de $X' = \mathcal{A}X$ sont de la forme

$$t \mapsto \alpha_1 e^{t\theta_1} Z_1 + \alpha_2 e^{t\theta_2} Z_2$$

avec α_1, α_2 des complexes arbitraires. Maintenant, comme $\overline{e^{t\theta_2} Z_2} = e^{t\theta_1} Z_1$, pour retourner aux solutions à valeurs $\mathbb{R}^2$, on doit avoir $\overline{\alpha_2} = \alpha_1$. En notant $\alpha_1 = a + ib$, $\alpha_2 = a - ib$, $\theta_1 = c + id$, $\theta_2 = c - id$ on arrive, après quelques calculs, aux solutions à valeurs $\mathbb{R}^2$ de $X' = \mathcal{A}X$. Elles contiennent des termes exponentiels e^{ct} (amortissement si $c < 0$, amplification si $c > 0$, pas d’effet si $c = 0$) et des termes d’oscillations $\cos(dt)$, $\sin(dt)$, et les deux constantes réelles libres sont a et b, cf exemple ci-dessous.

Exemple 3.4.4. *On résout*

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - y. \end{cases}$$

Les valeurs propres sont cette fois complexes : $-j = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $-j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *associées à* $\begin{pmatrix} j-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} j^2-1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Les solutions à valeurs* $\mathbb{C}^2$ *sont donc*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} j-1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-jt} + \alpha_2 \begin{pmatrix} j^2-1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-j^2 t},$$

avec α_1, α_2 *complexes. Si on veut les solutions à valeurs* $\mathbb{R}^2$ *il faut que* $\overline{\alpha_2} = \alpha_1$. *En posant* $\alpha_1 = a + ib$, *on trouve, après quelques calculs,*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ 2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} e^{t/2} + b \begin{pmatrix} -3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ 2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} e^{t/2}.$$

3.4.2 Equation (E) : $X' = \mathcal{A}X + B(t)$

Pour trouver une solution particulière à l’équation $X' = \mathcal{A}X + B(t)$ on “fait varier la constante C” : on écrit

$$Z(t) := e^{t\mathcal{A}} C(t),$$

et on veut que Z soit une solution particulière de (E). En injectant dans l’équation, on voit qu’il faut $e^{t\mathcal{A}} C'(t) = B(t)$ et on choisit donc

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-s\mathcal{A}} B(s) ds,$$

où $t_0 \in I$. Une solution particulière de (E) est donc

$$Z(t) = e^{t\mathcal{A}} \int_{t_0}^{t} e^{-s\mathcal{A}} B(s) ds.$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \underbrace{e^{t\mathcal{A}} C}_{les\ sol.\ de\ (H)} + \underbrace{e^{t\mathcal{A}} \int_{t_0}^{t} e^{-s\mathcal{A}} B(s) ds}_{une\ sol.\ part.\ de\ (E)}$$

où $C \in \mathbb{R}^n$ est arbitraire.

Si on veut résoudre le problème de Cauchy avec la condition initiale $X(t_0) = X_0$, on doit choisir $C = e^{-t_0\mathcal{A}}X_0$ et la solution est donc

$$t \mapsto e^{(t-t_0)\mathcal{A}}X_0 + e^{t\mathcal{A}} \int_{t_0}^{t} e^{-s\mathcal{A}}B(s)ds.$$

Exemple 3.4.5. *On résout sur* $]0, +\infty[$ *le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = -4x - 2y + \frac{2}{e^t-1} \\ y' = 6x + 3y - \frac{3}{e^t-1} \\ x(1) = 2(1 + \ln(e-1))e^{-1} \\ y(1) = -3(1 + \ln(e-1))e^{-1}. \end{cases}$$

1. *Comme ci dessus on trouve les solutions de l'équation homogène* (H) *; elles sont données par*
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

2. *On cherche une solution particulière de* (E) *: la variation des constantes* $\alpha_1 \leftarrow \alpha_1(t)$ *et* $\alpha_2 \leftarrow \alpha_2(t)$ *conduit au système*
$$\begin{cases} \alpha_1' + 2e^{-t}\alpha_2' = \frac{2}{e^t-1} \\ -2\alpha_1' - 3e^{-t}\alpha_2' = -\frac{3}{e^t-1}, \end{cases}$$
qu'on résout en $\alpha_1'(t) = 0$ *et* $\alpha_2'(t) = \frac{e^t}{e^t-1}$. *On choisit donc* $\alpha_1(t) = 0$ *et* $\alpha_2(t) = \ln(e^t-1)$ *d'où une solution particulière :*
$$t \mapsto \ln(e^t - 1) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

3. *Les solutions de* (E) *sont donc données par*
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (\alpha_2 + \ln(e^t - 1)) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

4. *Les conditions initiales imposent* $\alpha_1 = 0$ *et* $\alpha_2 = 1$. *La solution du problème de Cauchy est donc*
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (1 + \ln(e^t - 1)) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

3.5 Exercices

Ordre 1

Exercice 3.5.1. *La vitesse de déplacement des ions entre deux électrodes immergées dans un électrolyte vérifie l'équation différentielle*

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v = \frac{F}{m}$$

où m, F, R *sont des constantes. Calculer* v.

Exercice 3.5.2. *Résoudre les problèmes de Cauchy*

1. $x' - 2x = e^{2t}t^2$ *avec* $x(0) = 0$.
2. $x' - \frac{1}{1+t}x = 2t^2$ *avec* $x(0) = -3$.
3. $x' - (1+t)x = -2t - t^2$ *avec* $x(0) = 2$.

Exercice 3.5.3. *Résoudre les équations différentielles suivantes en en donnant toutes les solutions maximales :*

1. $x' + x = \sin t$,
2. $x' = 3t^2 - \frac{x}{t}$.

Exercice 3.5.4. *Pour* $a > 0$ *on considère la fonction Gaussienne définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\varphi(x) = e^{-ax^2}$. *On définit sa "transformée de Fourier" comme la fonction notée* $\widehat{\varphi}$ *et définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx.$$

1. *Montrer* $\widehat{\varphi}$ *est bien définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* $\widehat{\varphi}$ *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et exprimer* $\widehat{\varphi}'(\xi)$ *comme une intégrale à paramètre.*
3. *En intégrant par parties l'expression de* $\widehat{\varphi}'(\xi)$, *trouver un problème de Cauchy linéaire vérifié par* $\widehat{\varphi}$.
4. *Calculer* $\widehat{\varphi}(\xi)$.

Exercice 3.5.5. *Pour* $x \in \mathbb{R}$ *on pose*

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt.$$

1. *Montrer que* φ *est bien définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* φ *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et exprimer* $\varphi'(x)$ *comme une intégrale à paramètre.*
3. *En intégrant par parties l'expression de* $\varphi'(x)$, *trouver un problème de Cauchy linéaire vérifié par* φ.
4. *Calculer* $\varphi(x)$.
5. *Pouvez vous calculer* $\varphi(x)$ *"directement" et, ainsi, court-circuiter l'exercice ?...*

Exercice 3.5.6. *On considère le système linéaire d'équations différentielles*

$$\left\{ \begin{array}{rcrrr} x' & = & -5x & +8y & -4 \\ y' & = & -4x & +7y & +3 \end{array} \right. \tag{3.2}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 0$ *et* $y(0) = 1$.

1. *Trouver les vecteur propres et valeurs propres de la matrice*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. *Expliquer pourquoi résoudre (3.2) revient à résoudre le système*

$$\left\{ \begin{array}{rcrr} a' & = & 3a & +10 \\ b' & = & -b & -7 \end{array} \right. \tag{3.3}$$

avec les conditions initiales $a(0) = 2$ *et* $b(0) = -1$.

3. *Trouver la solution de (3.3), puis celle de (3.2).*

Exercice 3.5.7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que*

$$\lim_{t \to +\infty} f'(t) + f(t) = 0.$$

En résolvant l'EDO $x' + x = f'(t) + f(t)$, montrer que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Exercice 3.5.8. *Résoudre le système différentiel linéaire*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.5.9. *Résoudre le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2' &= 6x_1 - x_2 \\ x_3' &= -x_1 - 2x_2 - x_3. \end{cases}$$

Exercice 3.5.10. *Résoudre les équations différentielles $X' = \mathcal{A}X$ dans les cas suivants :*

1. $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$
3. $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.5.11 (EDO linéaires à coefficients non constants en dimension 2...)**.** *On considère la matrice $\mathcal{A}(t)$, dépendant de la variable $t \in \mathbb{R}$ et donnée par*

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer $B(t) = \int_0^t \mathcal{A}(s)ds$ puis $e^{B(t)}$.*
2. *Comparer $B'(t)e^{B(t)}$ et $(e^{B(t)})'$.*
3. *Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une unique solution $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ au problème de Cauchy*
$$X' = \mathcal{A}(t)X, \quad X(0) = X_0.$$
4. *A-t-on $\gamma(t) = e^{B(t)}X_0$? Comparer avec le cas des EDO linéaires en dimension* 1.

Exercice 3.5.12 (EDO linéaires à coefficients non constants en dimension 2...)**.** *Résoudre le système différentiel (où les inconnues x et y sont à valeurs réelles)*

$$\begin{cases} x' &= tx - y \\ y' &= x + ty. \end{cases}$$

On pourra poser $z = x + iy$...

Ordre 2

Exercice 3.5.13. *Résoudre les problèmes de Cauchy*

1. $x'' - 2x' - 3x = \cos t$ *avec la condition initiale* $x(0) = 1$ *et* $x'(0) = 0$.
2. $x'' - 3x' + x = t$ *avec la condition initiale* $x(0) = 10$ *et* $x'(0) = -10$.

Exercice 3.5.14. *Trouver une solution de*

$$t^2x'' + 4tx' + 2x = e^t$$

sous forme d'une série entière.

Exercice 3.5.15. *La vitesse* u *d'un liquide à l'intérieur d'un capillaire dépend de la distance* r *à l'axe de ce capillaire suivant la formule*

$$r\,\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = -kr$$

où k *est une constante. Calculer* $u(r)$ *en fonction de* r.

Exercice 3.5.16. *On considère l'équation différentielle (sur* $]0, +\infty[$*)*

$$t^2x'' - 2x + \frac{3}{t} = 0. \tag{3.4}$$

1. *Montrer qu'en posant* $z(t) = tx'(t) + x(t)$ *on obtient l'EDO du premier ordre*

$$tz' - 2z + \frac{3}{t} = 0.$$

2. *Résoudre cette dernière équation différentielle.*
3. *En déduire les solutions de* (3.4).

Exercice 3.5.17. *On considère l'équation différentielle (sur* $]0, +\infty[$*)*

$$t^2x'' + tx' - x = \frac{1}{t}.$$

En utilisant le changement de variable $t = e^u$, *trouver la solution satisfaisant* $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

Exercice 3.5.18. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *pour que toutes les solutions de l'équation différentielle* $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ *soient bornées.*

Exercice 3.5.19. *Trouver toutes les applications* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables telles que* $f(0) = 1$ *et, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 3.5.20. *Trouver toutes les applications* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Chapitre 4

Des outils pour les EDO non linéaires

On a vu au Chapitre 3 que pour une EDO *linéaire* (sous des hypothèses “raisonnables”) les solutions maximales sont globales, que la structure de l'ensemble des solutions est connue et que, dans un certain nombre de cas, on savait calculer les solutions.

Cependant la majorité des phénomènes biologiques, physiques, chimiques etc sont non linéaires et les EDO *non linéaires* sont bien plus difficiles... On a déjà vu que les solutions ne sont pas forcément globales (explosion en temps fini par exemple). Quant à “calculer les solutions” cela est réservé à quelques familles sympathiques mais rares, cf sous-section 4.1.1. On voudrait donc développer des techniques *qualitatives* pour pouvoir décrire la solution (typiquement fournie par le Théorème 2.1.5 de Cauchy-Lipschitz) sans pour autant la calculer : est elle globale ? si oui quel est son comportement asymptotique quand, disons, $t \to +\infty$? etc... On va donner ici quelques pistes sans rentrer dans trop de théorie (que le lecteur intéressé pourra consulter dans [1] ou [2]).

4.1 Equations scalaires (taille 1)

4.1.1 Quelques cas “calculables”

On donne ici quelques équations non linéaires pour lesquelles on a des techniques de calcul relativement efficaces. On passe parfois sous silence quelques arguments de type “Cauchy-Lipschitz” qui justifient les calculs faits.

• **Equations lacunaires** $x' = f(x)$

On écrit $\frac{dx}{f(x)} = dt$ d'où, par intégration, t en fonction de x puis, en inversant, x en fonction de t. Si l'intégration ET l'inversion sont explicites, alors on a une expression explicite de $x(t)$. Sinon, l'expression est implicite, cf Exercice 4.4.1.

Exemple 4.1.1. *Résoudre*

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

On a $\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$ *puis* $dt = \frac{dx}{1+x^2}$ *et donc* $\int_0^T dt = \int_{x(0)=0}^{x(T)} \frac{dx}{1+x^2}$, *soit encore* $T = \arctan x(T)$ *et enfin* $x(T) = \tan T$ *qu'on écrit plutôt* $x(t) = \tan t$.

• **Equations aux variables séparées** $x' = f(x)g(t)$

On écrit $\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$ d'où, par intégration, “une fonction de x=une fonction de t” puis, en inversant, x en fonction de t, avec les mêmes remarques que ci dessus.

Exemple 4.1.2. *Résoudre*

$$\begin{cases} x' = t(1+x^2) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

• **Equation de Bernouilli** $x' = a(t)x + b(t)x^{n+1}$**,** $n \in \mathbb{N}$

Pour trouver d'autres solutions que la fonction nulle on écrit

$$\frac{x'}{x^{n+1}} = a(t)\frac{1}{x^n} + b(t),$$

et en posant $z = \frac{1}{x^n}$ on est ramené à l'équation différentielle du premier ordre :

$$-\frac{1}{n}z' = a(t)z + b(t).$$

Exemple 4.1.3. *Soit $x' = 2tx + 3x^2$. La fonction nulle est solution ! Pour d'autres solutions on a*

$$\frac{x'}{x^2} = 2t\frac{1}{x} + 3,$$

soit encore (en posant $z = 1/x$) $z' = -2tz - 3$, équation linéaire du premier ordre que l'on sait résoudre...

• **Equation de Ricatti** $x' = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$

Si on a la chance d'avoir une solution particulière x_1 alors on cherche les autres sous la forme $x = x_1 + h$ avec h à déterminer. On voit alors que h doit vérifier l'équation de Bernouilli

$$h' = (b(t) + 2c(t)x_1(t))h + c(t)h^2$$

qu'on sait résoudre (cf ci dessus).

4.1.2 Equations scalaires autonomes : études qualitatives

On prend ici $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on s'intéresse à l'EDO $x' = f(x)$ et au problème de Cauchy associé, disons

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \ \text{ donné.} \end{cases}$$

Le Théorème 2.1.5 de Cauchy-Lipschitz donne une unique solution maximale x, définie sur un intervalle ouvert $]T_{min}, T_{max}[$ avec

$$-\infty \leq T_{min} < 0 < T_{max} \leq +\infty.$$

On aimerait savoir, par exemple, si T_{max} est fini ou pas. Ensuite, si $T_{max} = +\infty$, on cherche typiquement à comprendre le comportement de $x(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

Définition 4.1.4 (Equilibre)**.** *Les équilibres de l'équation différentielle $x' = f(x)$ sont les zéros de f, cad les solutions x^* de $f(x^*) = 0$.*

Par le Théorème 2.1.5 de Cauchy-Lipschitz, si une solution de l'EDO $x' = f(x)$ vaut x^* (un équilibre) à *un* temps alors elle vaut x^* à tous les temps ! Dit autrement, la solution du problème de Cauchy avec une donnée initiale qui n'est pas un équilibre ne peut jamais toucher un équilibre : les équilibres sont des frontières infranchissables !

D'autre part, lorsque $T_{max} = +\infty$, les équilibres sont des candidats "naturels" pour décrire le comportement de $x(t)$ quand $t \to +\infty$: si $x(t)$ a une limite finie quand $t \to +\infty$ alors cette limite doit être un équilibre.

Exemple 4.1.5. *Montrer, sans calculer la solution, que la solution du problème de Cauchy logistique $x' = x(1-x)$, $x(0) = x_0 \geq 0$ est globale et déterminer le comportement de $x(t)$ lorsque $t \to +\infty$. Et quid si $x_0 < 0$?...*

Lorsqu'on dispose d'un équilibre x^* on peut se demander ce qu'il se passe lorsqu'on prend une donnée initiale proche de x^*. Par exemple, l'Exemple 4.1.5 nous dit que pour l'équation logistique, l'équilibre 0 est instable : si $x_0 = 0$ alors $x \equiv 0$ et si on perturbe un peu la donnée initiale alors la solution "fuit" l'équilibre 0 ; en revanche l'équilibre 1 est stable : si $x_0 = 1$ alors $x \equiv 1$ et si on perturbe un peu la donnée initiale alors la solution "reste proche" de l'équilibre 1 et "revient même" vers l'équilibre 1 (on parle de stabilité asymptotique).

Définition 4.1.6 (Equilibre stable ou instable)**.** *On dit qu'un équilibre x^* est stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que : pour toute donnée initiale x_0 telle que $|x_0 - x^*| < \alpha$, la solution x du problème de Cauchy $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ est définie pour tous les temps $t \geq 0$ et vérifie*

$$|x(t) - x^*| < \varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

On dit qu'un équilibre x^* est instable s'il n'est pas stable.

Définition 4.1.7 (Equilibre asympotiquement stable)**.** *On dit qu'un équilibre x^* est asymptotiquement stable s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : pour toute donnée initiale x_0 telle que $|x_0 - x^*| < \varepsilon$, la solution x du problème de Cauchy $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ est définie pour tous les temps $t \geq 0$ et vérifie*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = x^*.$$

Evidemment la stabilité asymptotique implique la stabilité.

Exemple 4.1.8. *Pour l'EDO linéaire $x' = ax$ (où $a \in \mathbb{R}$), l'équilibre $x^* = 0$ est instable quand $a > 0$, stable (mais pas asymptotiquement stable) quand $a = 0$, asymptotiquement stable quand $a < 0$.*

Théorème 4.1.9 (Stabilité, instabilité)**.** *Soit x^* un équilibre.*
- *Si $f'(x^*) > 0$ alors l'équilibre x^* est instable.*
- *Si $f'(x^*) < 0$ alors l'équilibre x^* est asymptotiquement stable.*

4.2 Systèmes différentiels autonomes de taille 2

On prend ici $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et on s'intéresse à l'EDO $X' = f(X)$ qu'on peut mettre sous forme de système

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y), \end{cases}$$

et au problème de Cauchy associé avec donnée initiale $x(0) = x_0$ donné, $y(0) = y_0$ donné. On voudrait faire une étude qualitative [1] de la solution (x,y) donnée par le Théorème 2.1.5 de Cauchy-Lipschitz, dans l'esprit de la sous-section 4.1.2. Par exemple, si la solution est globale, que se passe t il en temps grand pour la solution $(x(t), y(t))$? Convergence vers un équilibre (x^*, y^*) ? Oscillations ? Autre chose ?... Notons qu'on définit un équilibre comme un couple (x^*, y^*) tel que

$$\begin{cases} f_1(x^*, y^*) = 0 \\ f_2(x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

1. L'idée n'est pas de faire une théorie parfaite (cf [1] ou [2]) mais de traiter quelques exemples significatifs.

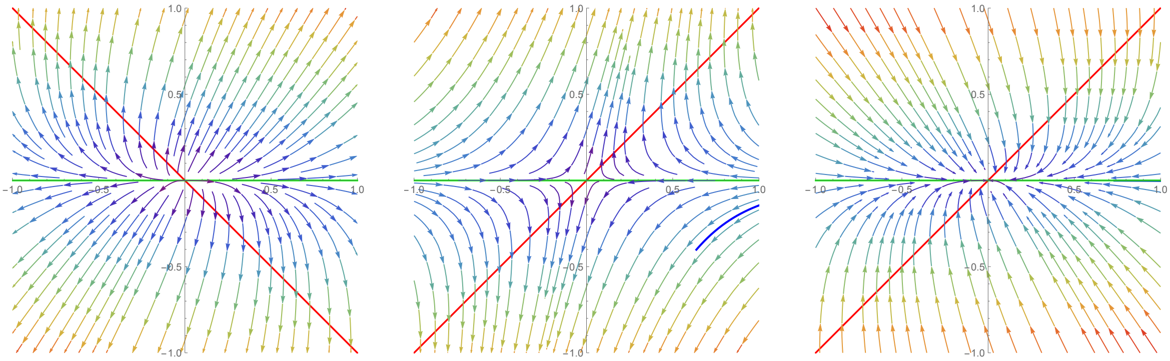

FIGURE 4.1 – Les valeurs propres sont réelles. A gauche : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ (NOEUD INSTABLE). Au centre : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ (POINT SELLE). A droite : $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ (NOEUD STABLE).

Notion de trajectoire. Prenons $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$. Je peux, dans un repère, mettre t en abscisse et tracer les deux courbes représentatives des fonctions x, y, avec en ordonnée $x(t)$ (ou $y(t)$). Je suis donc dans le plan (t, x) (ou (t, y)) et j'ai deux sinusoïdes qui "oscillent" autour de 0. Une autre façon de voir est de tracer la trajectoire associée cad l'ensemble des points $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ quand le temps t décrit $\mathbb{R}$. Je suis donc dans le plan (x, y) et j'ai le cercle de centre l'origine et de rayon 1.

Notez que, quand je trace la courbe représentative d'une fonction, pour chaque abscisse on a (au maximum) un point. En revanche, quand je trace une trajectoire, pour chaque abscisse on peut avoir plusieurs points. C'est le cas si au cours du temps, (x, y) repasse par le même point, ce qui arrive toujours quand x et y sont périodiques avec même période (cf ex. ci dessus).

Quel est l'intérêt pour nous ? Eh bien, ne sachant en général pas calculer les solutions $x(t)$ et $y(t)$ d'un système différentiel non linéaire on a peu de chances de tracer leurs courbes... Mais on dispose d'outils adaptés pour dire des choses sur les trajectoires [2], et donc sur $x(t)$ et $y(t)$. On va expliquer cela sur quelques exemples non linéaires en sous-section 4.2.2 mais avant cela, petit retour sur les systèmes linéaires.

4.2.1 Stabilité linéaire

Considérons ici $X' = \mathcal{A}X$ un système linéaire de taille 2 avec $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et admettons pour simplifier que

$$\mathcal{A} \text{ admet 2 valeurs propres distinctes } \lambda_1 \neq 0 \text{ et } \lambda_2 \neq 0.$$

Alors $\mathcal{A}$ est inversible donc le seul équilibre est $(0, 0)$ et, quitte à aller faire un tour dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ est diagonalisable. Au vu du Corollaire 3.4.2, les valeurs propres λ_1 et λ_2 disent directement si l'équilibre $(0, 0)$ est asympotiquement stable (auquel cas toute trajectoire passant suffisamment proche de $(0, 0)$ convergera vers $(0, 0)$ en temps grand), stable, ou instable, cf Figures 4.1 et 4.2.

4.2.2 Le cas non linéaire par des exemples

Face à un système non linéaire

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y), \end{cases}$$

2. Notons que la trajectoire associée à une solution maximale est appelée courbe intégrale et qu'une courbe intégrale passant par un point $X_0 = (x_0; y_0)$ est appelée orbite de X_0.

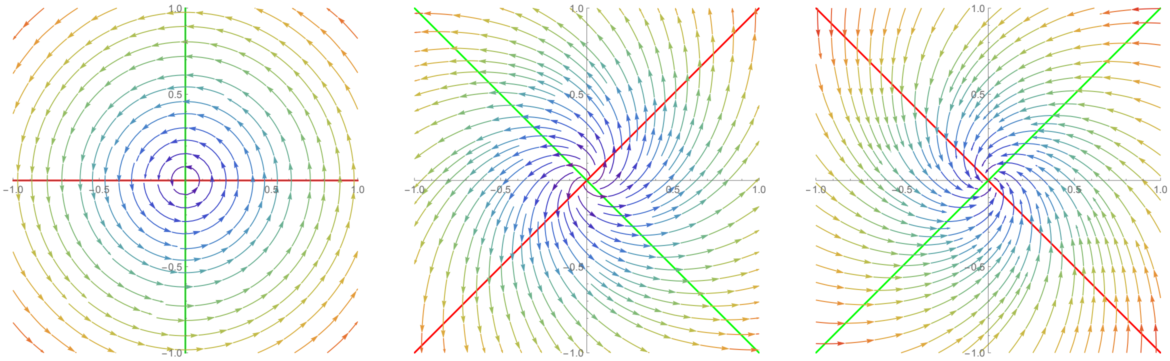

FIGURE 4.2 – Les valeurs propres sont complexes conjuguées, disons $\alpha \pm i\beta$ ($\beta \neq 0$). A gauche : $\alpha = 0$ (éq. STABLE mais PAS ASYMPTOTIQUEMENT STABLE, on parle de CENTRE). Au centre : $\alpha > 0$ (FOYER INSTABLE). A droite : $\alpha < 0$ (FOYER STABLE).

on peut utiliser la méthode du plan de phase : on se place dans le plan (x, y), on trace les isoclines zéro, la direction des courbes intégrales, détermine les équilibres et on étudie leur stabilité. Notons que la stabilité non linéaire est une notion subtile, cf [1, Chapitre 8], mais on retient les cas favorables suivants.

Théorème 4.2.1 (Stabilité non linéaire, cas favorables)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 et (x^*, y^*) un équilibre, cad $f(x^*, y^*) = (0, 0)$.*
• *Si les 2 valeurs propres de la jacobienne $Df(x^*, y^*)$ sont de partie réelle strictement négatives alors l'équilibre (x^*, y^*) est asymptotiquement stable pour l'équation $X' = f(X)$.*
• *Si (au moins) l'une des 2 valeurs propres de la jacobienne $Df(x^*, y^*)$ est de partie réelle strictement positive alors l'équilibre (x^*, y^*) est instable pour l'équation $X' = f(X)$.*

Moralement, il suffit *dans les cas favorables* de linéariser autour de l'équilibre et on retombe en sous-section 4.2.1... Notons que l'apparition de valeurs propres à partie réelle nulle a tendance à nous faire sortir des situations favorables (cas dégénérés)... Ainsi :

Exemple 4.2.2. *Comparer les trajectoires du système non linéaire*

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -y, \end{cases}$$

avec celles du sytème linéarisé en $(0, 0)$, cad

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -y. \end{cases}$$

Proie-prédateur

On reprend

$$\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = ry(-2+x). \end{cases} \qquad \text{PROIE-PREDATEUR}$$

On trace (en rouge) l'isocline $x' = 0$, cad dans le plan (x, y) les points qui annulent $x(1-y)$, soit deux droites. Cette isocline partage le plan en régions où "x grandit" et en régions où "x diminue".

On trace (en vert) l'isocline $y' = 0$, cad dans le plan (x, y) les points qui annulent $ry(-1+x)$, soit deux droites. Cette isocline partage le plan en régions où "y grandit" et en régions où "y diminue".

• Première info : à l'intersection des deux isoclines, on trouve les équilibres du système. Ici les équilibres sont $(0,0)$ (tout le monde disparaît) et $(2,1)$ (tout le monde survit avec saturation).
• Deuxième info : on peut dessiner des flèches qui indiquent la direction des courbes intégrales.

Avec cela, on comprend (à peu près) que les trajectoires auront tendance à "tourner" autour de l'équilibre $(2,1)$. Vont elles spiraler de manière concentrique ? spiraler de manière excentrique ? rester en orbite ? Pour répondre à ces questions, il faut étudier la stabilité non linéaire de l'équilibre $(2,1)$. Pour cela, on linéarise autour de l'équilibre, puis on cherche les valeurs propres du linéarisé. Commençons par le faire autour de l'équilibre $(0,0)$.

Stabilité de $(0,0)$**.** Si $x \approx 0$ et $y \approx 0$ alors le système devient

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -2ry, \end{cases} \qquad \text{PROIE-PREDATEUR LINEARISE EN } (0,0)$$

soit un système linéaire, de matrice $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2r \end{pmatrix}$. Une des valeurs propres est strictement positive, donc l'équilibre est instable pour le linéarisé et pour le système non linéaire.
Stabilité de $(2,1)$**.** Si $\bar{x} = 2 - x \approx 0$ et $\bar{y} = 1 - y \approx 0$ alors le système devient

$$\begin{cases} \bar{x}' = -2\bar{y} \\ \bar{y}' = r\bar{x}, \end{cases} \qquad \text{PROIE-PREDATEUR LINEARISE EN } (2,1)$$

soit un système linéaire, de matrice $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ r & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont complexes conjuguées $\pm i\sqrt{2r}$. Donc pour le linéarisé l'équilibre $(2,1)$ est un centre. On ne peut rien en déduire pour le système non linéaire car notre Théorème 4.2.1 n'est pas assez fort...

Cette analyse par plan de phase (cf Figure 4.3 partie gauche) suggère que les courbes intégrales vont en temps grand tourner autour du point $(2,1)$ sans converger vers lui, cad que les solutions du système proie-prédateur vont osciller autour de 2 pour les proies et de 1 pour les prédateurs en opposition de phases (cf Figure 4.3 partie droite) : x (=proie) croît, faisant augmenter y (=prédateur) ; donc par prédation x diminue puis, par manque de nourriture y décroît ; donc par manque de prédateur, x croît etc...etc... On renvoie à l'Exercice 4.4.12 pour une preuve rigoureuse de ceci.

Compétition

On reprend

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \alpha y) \\ y' = ry(1 - y - \beta x). \end{cases} \qquad \text{COMPETITION}$$

Les équilibres sont $(0,0)$ (cad tout le monde perd), $(0,1)$ (cad y gagne), $(1,0)$ (cad x gagne) et $(\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta})$ qu'on ne garde que s'il est positif en dynamique des populations (cad coexistence). A l'aide d'une analyse par plan de phase (cf Exercice 4.4.9), on peut arriver aux résultats suivants concernant le comportement de $(x(t), y(t))$ quand $t \to +\infty$:

• si $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$ alors la compétition est faible et on a coexistence, cad $x(t) \to \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}$, $y(t) \to \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}$.
• si $0 < \alpha < 1$ et si $\beta > 1$ alors x est un meilleur compétiteur et il l'emporte (et y disparaît), cad $x(t) \to 1$, $y(t) \to 0$.

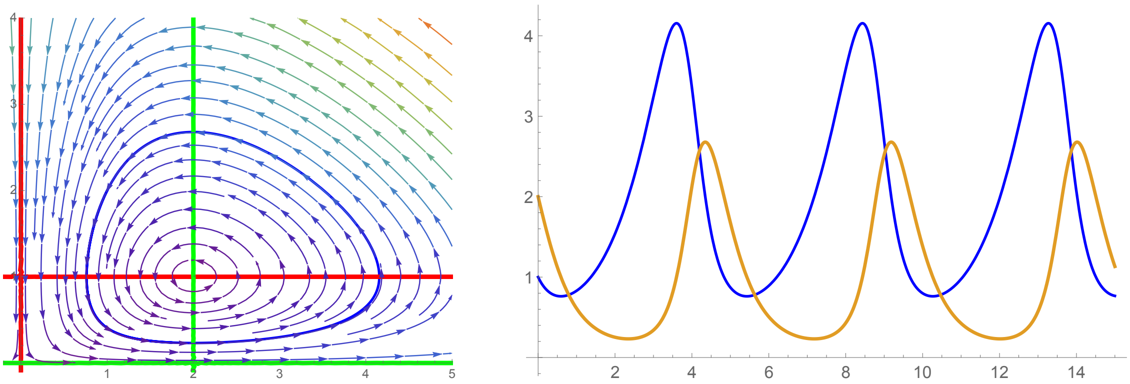

FIGURE 4.3 – Proie-prédateur. A gauche : le plan de phase, en bleu l'orbite de $(x_0, y_0) = (1, 2)$. A droite : $x(t)$ (les proies, en bleu) en fonction du temps et $y(t)$ (les prédateurs, en orange) en fonction du temps, avec condition initiale $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

• si $\alpha > 1$ et si $0 < \beta < 1$ alors y est un meilleur compétiteur et il l'emporte (et x disparaît), cad $x(t) \to 0$, $y(t) \to 1$.
• si $\alpha > 1$ et si $\beta > 1$ alors on a deux bons compétiteurs et le résultat dépend des conditions initiales (cas beaucoup plus difficile à étudier)...

On remarque que le r n'intervient pas pour séparer les cas. En fait, il intervient dans la "dynamique" du système, en jouant sur la vitesse de convergence vers l'équilibre.

Le pendule

Souvenons qu'une EDO de taille 1 (cad scalaire) et d'ordre 2 se ramène à une EDO de taille 2 (cad un système de taille 2) et d'ordre 1. Aussi le problème de Cauchy non linéaire pour le pendule

$$\begin{cases} \theta'' = -\sin\theta \\ \theta(0) \text{ donné} \\ \theta'(0) \text{ donné} \end{cases}$$

trouve sa place dans cette section : en posant $x = \theta$ (la position angulaire), $y = \theta'$ (la vitesse angulaire), le problème se réécrit

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x \\ x(0) \text{ donné} \\ y(0) \text{ donné.} \end{cases} \tag{4.1}$$

La non linéarité $(x, y) \mapsto (y, -\sin x)$ étant globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$, le Théorème 2.3.4 de Cauchy-Lipschitz global nous assure l'existence et unicité d'une solution (x, y) maximale qui de plus est globale, cad $t \mapsto (x(t), y(t))$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ce qui nous intéresse maintenant c'est de déterminer le comportement asymptotique quand $t \to +\infty$. Sur la Figure 4.4, on comprend que certaines trajectoires sont périodiques (oscillations du pendule autour de la position verticale), alors que d'autres non (par exemple, si la vitesse initiale est grande, le pendule "enchaîne les tours jusqu'à l'infini"). On renvoie à l'Exercice 4.4.13 pour plus de détails.

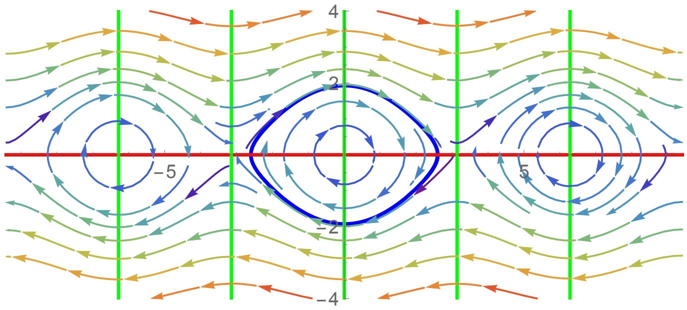

FIGURE 4.4 – Le problème de Cauchy (4.1), en bleu la trajectoire pour la condition initiale $x(0) = 2.8$, $y(0) = 0$.

4.3 Fonction de Lyapounov

On prend ici $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et on considère le système autonome

$$X' = f(X). \tag{4.2}$$

On suppose que 0 est un équilibre et on s'intéresse à sa stabilité.

Définition 4.3.1 (Fonction de Lyapounov)**.** *Soit U un voisinage de 0 et $L : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On dit que L est une fonction de Lyapounov pour (4.2) en l'équilibre 0 si*

(i) *$L(0) = 0$ et, pour tout $X \in U \setminus \{0\}$, $L(X) > 0$.*

(ii) *pour tout $X_0 \in U \setminus \{0\}$, $t \mapsto L(X(t))$ est décroissante (ici X désigne la solution maximale de (4.2) avec donnée initiale X_0).*

Si dans (ii) on a une décroissance stricte on parle de fonction de Lyapounov stricte.

Intuitivement, si L est une fonction de Lyapounov (stricte) les trajectoires vont avoir tendance à ne pas s'éloigner (se rapprocher) du minimum de L c'est à dire 0.

Notons que

$$\frac{d}{dt}L(X(t)) = \langle \nabla L(X(t)), X'(t)\rangle = \langle \nabla L(X(t)), f(X(t))\rangle.$$

Exemple 4.3.2 (Système gradient)**.** *On parle de système gradient lorsque f "dérive d'un V" c'est à dire*

$$X' = -\nabla V(X).$$

Dans ce cas V est un bon candidat à "être une fonction de Lyapounov" car

$$\frac{d}{dt}V(X(t)) = -\|\nabla V(X(t))\|^2 \leq 0.$$

Théorème 4.3.3 (Stabilité via Lyapounov)**.** *Si on dispose d'une fonction de Lyapounov pour (4.2) en l'équilibre 0 alors 0 est un équilibre stable. Si de plus la fonction de Lyapounov est stricte, alors 0 est asymptotiquement stable.*

Exercice 4.3.4. *On considère*

$$(S_1) \begin{cases} x' = y - x(x^2+y^2) \\ y' = -x - y(x^2+y^2), \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x' = y + x(x^2+y^2) \\ y' = -x + y(x^2+y^2). \end{cases}$$

Montrer que, pour les deux systèmes, $(0,0)$ *est l'unique équilibre et que le linéarisé en* $(0,0)$ *est* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *dont les valeurs propres sont* $\pm i$*. Ainsi le Théorème 4.2.1 ne permet pas de conclure. Néanmoins, en utilisant*

$$L : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

montrer que l'équilibre est asymptotiquement stable pour (S_1) *mais instable pour* (S_2)*.*

Si 0 est un équilibre asymptotiquement stable, on appelle bassin d'attraction l'ensemble des données initiales $X_0 \in \Omega$ telles que $X(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Théorème 4.3.5 (Globale asympotique stabilité via Lyapounov)**.** *Supposons* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*. Supposons qu'on dispose d'une fonction de Lyapounov stricte* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *pour* (4.2) *en* 0 *telle que*

$$L(X) \to +\infty \quad \text{quand } \|X\| \to +\infty.$$

Alors le bassin d'attraction de 0 *est* $\mathbb{R}^n$ *tout entier. On dit que l'équilibre* 0 *est* <u>*globalement asymptotiquement stable*</u>*.*

Exercice 4.3.6. *On considère*

$$\begin{cases} x' = -x^5 - y \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

Montrer que $L(x,y) := 2x^2 + y^2$ *est une fonction de Lyapounov en* $(0,0)$*. Qu'en déduire ?*

4.4 Exercices

Taille 1

Exercice 4.4.1 (Effet Allee en dynamique des populations)**.** *On considère le problème de Cauchy non linéaire*

$$\begin{cases} x' = x(x-\theta)(1-x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $0 < \theta < 1$ *est fixé et la donnée initiale* $x_0 > 0$*.*

1. *Mettre en place la technique des équations lacunaires présentée en sous-section 4.1.1. Montrer que l'intégration est explicite mais l'inversion (plutôt) implicite...*
2. *On utilise maintenant plutôt les méthodes qualitatives développées en sous-section 4.1.2 : montrer que la solution du problème de Cauchy est globale, et déterminer le comportement en temps grand de* $x(t)$ *suivant la valeur de la donnée initiale* x_0*. Justifier le fait que* θ *est qualifié de seuil (dessiner les graphes de la fonction de croissance logistique* $x \mapsto x(1-x)$ *et celle de l'exercice présent* $x \mapsto x(x-\theta)(1-x)$*).*

Exercice 4.4.2. *Soit* f *la fonction définie sur* $]-1,1[\times]-1,1[$ *par*

$$f(t,x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-t^2}}.$$

Résoudre les problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Exercice 4.4.3. *Résoudre le problème de Cauchy logistique $x' = x(1-x)$, $x(0) = x_0 \in]0,1[$, en traitant l'EDO comme*

1. *une équation lacunaire (déjà fait en cours !).*
2. *une équation de Bernouilli.*

Exercice 4.4.4 (Compétition périodique)**.** *On considère une population (mesurée par $n(t)$ pour $t \geq 0$) et on suppose que la compétition intra spécifique varie avec le temps :*

$$n' = n[1 - (2 + \cos t)n].$$

On suppose que la population initiale est $n(0) = 1/2$. Dans le modèle logistique "standard" (obtenu "en enlevant $\cos t$") on a alors $n(t) = 1/2$ pour tous les temps. Ici la situation va être différente...

1. *Tracer le graphe de $t \mapsto 2 + \cos t$. "Expliquer" l'équation.*
2. *On pose $p(t) = \frac{1}{n(t)}$. Montrer qu'on a alors l'équation différentielle*

$$p' = -p + 2 + \cos t.$$

Quel est l'avantage de cette EDO par rapport à celle vérifiée par $n(t)$? La résoudre (vérifier que $t \mapsto 2 + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ est une solution particulière).

3. *En déduire $n(t)$. Que se passe t il quand $t \to +\infty$.*

Exercice 4.4.5. *Discuter du comportement en temps grand de la solution (est elle bien globale d'ailleurs ?) de*

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ 0 < x(0) < 1 \text{ donné,} \end{cases}$$

dans le cas où $f(x) = x(x - \frac{1}{2})(x-1)$ puis dans le cas où $f(x) = x(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3})(x-1)$.

Exercice 4.4.6 (Compétition "puissance")**.** *On considère une population (mesurée par $n(t)$ pour $t \geq 0$) décrite par l'équation*

$$n' = n(1 - n^\alpha),$$

où $\alpha \geq 1$ est fixé. On suppose que $0 < n(0) < 1$.

1. *Montrer que la solution de problème de Cauchy est globale et que $0 < n(t) < 1$ pour tous les temps $t \geq 0$.*
2. *Quel est le comportement de $n(t)$ quand $t \to +\infty$.*
3. *Quel modèle retrouve t on pour $\alpha = 1$? et pour $\alpha \to +\infty$?*

Taille 2

Exercice 4.4.7 (Un système linéaire)**.** *On se donne le problème de Cauchy linéaire suivant*

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. *Le résoudre en diagonalisant la matrice $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

2. *Le résoudre en l'écrivant comme une équation scalaire d'ordre 2.*
3. *L'étudier avec la méthode du plan de phase.*

Exercice 4.4.8. *Tracer dans $\mathbb{R}^2$ les orbites de l'équation différentielle définie par les champs de vecteurs linéaires $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnés par $f(X) = \mathcal{A}X$ dans les cas*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \textit{puis} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.4.9 (Compétition)**.** *On reprend le système de compétition*

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \alpha y) \\ y' = ry(1 - y - \beta x), \end{cases}$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $r > 0$.

1. *"Expliquer" formellement le comportement du système en temps grand pour α très petit.*
2. *On suppose ici $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. Faire une analyse par plan de phase. Que suggère t elle ?*
3. *On suppose ici $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$. Faire une analyse par plan de phase. Que suggère t elle ?*

Exercice 4.4.10 (Mutualisme)**.** *On reprend le système de mutualisme*

$$\begin{cases} x' = x(1 - x + \alpha y) \\ y' = ry(1 - y + \beta x), \end{cases}$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $r > 0$.

1. *On suppose ici $\alpha\beta > 1$ (forte entraide). Faire une analyse par plan de phase. Que suggère t elle ?*
2. *On suppose ici $\alpha\beta < 1$ (entraide "raisonnée"). Faire une analyse par plan de phase. Que suggère t elle ?*

Exercice 4.4.11. *On considère deux populations mesurées par $x(t)$ et $y(t)$. Le modèle est le système différentiel non linéaire*

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \alpha y) \\ y' = y(-1 + \beta x), \end{cases}$$

où α et β sont deux constantes strictement positives.

1. *En quelques phrases, expliquer les phénomènes mis en jeu dans ce système.*
2. *Dans cette question, on suppose α très petit (cad $\alpha \to 0$). Formellement, quel est le devenir de la population $x(t)$? Suivant la valeur de β, discuter ensuite le devenir de $y(t)$.*
3. *Dans cette question, on suppose $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 1$. Tracer les isoclines zéro et la direction des trajectoires. Quels sont les équilibres ? Etudier la stabilité des deux équilibres "faciles". Pour l'équilibre plus "subtil" on admet que :*

   • *pour β proche de 1, on a (après linéarisation) deux valeurs propres réelles strictement négatives. Que suggère l'analyse sur le devenir des deux populations $x(t)$ et $y(t)$?*

   • *pour β grand, on a (après linéarisation) deux valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle négative. Que suggère l'analyse sur le devenir des deux populations $x(t)$ et $y(t)$? Quelle différence avec le cas précédent ?*

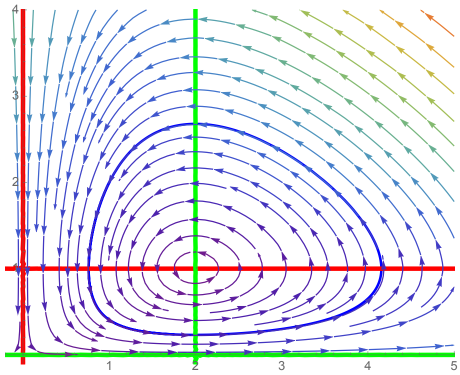

FIGURE 4.5 – Proie-prédateur : le plan de phase, en bleu l'orbite de $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Exercice 4.4.12 (Proie-prédateur). *On considère ici le système proie prédateur regardé en cours, à savoir*

$$\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = ry(-2+x), \end{cases}$$

avec $r > 0$, dont on fait un problème de Cauchy en adjoignant une condition initiale (x_0, y_0) avec $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$. Il s'agit ici de faire une preuve rigoureuse des comportements que semble indiquer la Figure 4.5 (sur laquelle on va évidemment s'appuyer).

1. *Qui sont les équilibres ?*
2. *Montrer que les axes sont invariants et, plus précisément, calculer les solutions lorsque $x_0 = 0$, puis lorsque $y_0 = 0$.*
3. *Montrer que le quart de plan ouvert $Q := \{(x, y), x > 0$ et $y > 0\}$ est également invariant, cad que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tous les $t > 0$ d'existence de la solution maximale.*
4. *Soit $H :]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

   $$H(x, y) = rx + y - 2r \ln x - \ln y.$$

   Montrer que H est une intégrale première pour le système proie prédateur, cad que si (x, y) est une solution maximale (avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$) sur un intervalle I alors la fonction $\mathcal{H} : I \to \mathbb{R}$ définie par

   $$\mathcal{H}(t) := H(x(t), y(t)),$$

   est constante sur I. En déduire que les solutions maximales sont bornées et donc globales.
5. *On va maintenant "suivre" une courbe intégrale. Sur la Figure 4.5 on définit les quatre ouverts $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 2$ et $0 < y < 1\}$ noté SO comme sud ouest, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 2$ et $0 < y < 1\}$ noté SE, puis, de même NE et NO. Suivons la courbe intégrale à partir d'un $(x_0, y_0) \in SO$. Montrer qu'après un temps fini, cette courbe passe dans SE. Montrer ensuite qu'après un autre temps fini elle passe dans NE. On admet ensuite qu'elle passe dans NO, puis revient dans SO, puis ça recommence...*
6. *On va maintenant montrer que la courbe intégrale suivie ci dessus repasse par les mêmes endroits à chaque tour... Précisément, partons de $(x_0, 1)$ avec $0 < x_0 < 2$ cad un point de la frontière NO-SO. Par la question précédente, il existe un temps $T > 0$ de retour à la frontière, cad $x(T) \in (0, 2)$ et $y(T) = 1$. A l'aide de la question 4, montrer que*

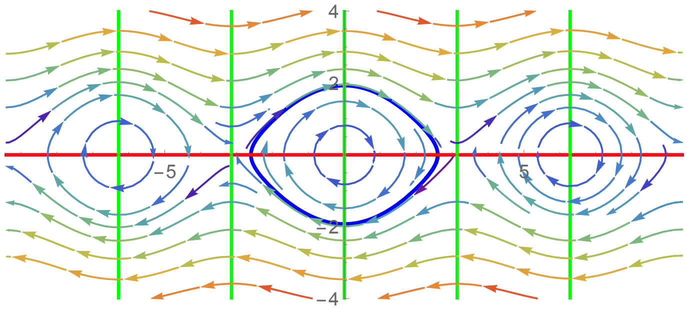

FIGURE 4.6 – Plan de phase pour le pendule. En bleu la trajectoire pour la condition initiale $x(0) = 2.8$, $y(0) = 0$.

forcément $x(T) = x_0$. A l'aide du Théorème de Cauchy-Lipschitz, en déduire que la solution est périodique de période T (qui dépend de r et de la condition initiale et qu'on ne cherchera pas à calculer).

7. *Pour conclure, montrons que "$x(t)$ oscille bien autour de 2" et que "$y(t)$ oscille bien autour de 1". On définit les valeurs moyennes de x et de y sur une période par*

$$< x >:= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt, \quad < y >:= \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt.$$

En utilisant que $\frac{x'(t)}{x(t)} = 1 - y(t)$, montrer que $< y >= 1$. Que vaut $< x >$?

Exercice 4.4.13 (Le pendule)**.** *On se donne $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ (un angle initial) et $\omega_0 \in \mathbb{R}$ (une vitesse angulaire intiale) et on considère la solution globale (pourquoi ?) du problème de Cauchy non linéaire*

$$\begin{cases} \theta'' = -\sin\theta \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = \omega_0 \end{cases} \tag{4.3}$$

qu'on peut réécrire (comment ?)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x \\ x(0) = \theta_0 \\ y(0) = \omega_0. \end{cases}$$

On voudrait prouver les comportements suggérés par le plan de phase de la Figure 4.6.

1. *Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 - \cos\theta(t) = C,$$

où $C = \frac{1}{2}{\omega_0}^2 - \cos\theta_0$ est une constante plus grande que -1.

2. *1er cas : $C = -1$. Que se passe t il ?*
3. *2ème cas : $-1 < C < 1$. Montrer que $\cos\theta(t) > -1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que $-\pi < \theta(t) < \pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que θ ne peut pas être monotone (ni ultimement monotone d'ailleurs). En s'inspirant de l'Exercice 4.4.12, montrer que la courbe intégrale "visite" 4 ouverts à préciser et en déduire que θ est périodique.*

4. *3ème cas : $C = 1$. Par exemple que se passe t il si $\theta_0 = \pi$, $\omega_0 = 0$? Notons que, dans d'autres situations, on peut montrer qu'il existe des solutions connectant l'équilibre $(-\pi, 0)$ quand $t \to -\infty$ à l'équilibre $(\pi, 0)$ quand $t \to +\infty$. Sont ce des solutions "physiques" ?*

5. *4ème cas : $C > 1$. Montrer que θ' ne s'annule jamais et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : soit $\theta'(t) \geq \alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $\theta'(t) \leq -\alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Que se passe t il ?*

6. *Retour sur le 2ème cas : on cherche à calculer la période T. Pour simplifier prenons $-\pi < \theta_0 < 0$ et $\omega_0 = 0$. Que valent $\theta\left(\frac{T}{2}\right)$ et $\theta'\left(\frac{T}{2}\right)$? Montrer que*

$$\theta'(t) = \sqrt{2(C + \cos\theta(t))}, \quad \forall 0 \leq t \leq \frac{T}{2},$$

puis que

$$T = 2\int_{\theta_0}^{-\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(C+\cos\theta)}} = 4\int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_{max})}},$$

où $\theta_{max} := -\theta_0 > 0$. Montrer qu'on a également

$$T = 2\int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_{max}}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

puis que, en utilisant le changement de variable $\sin\varphi = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_{max}}{2}}$,

$$T = 4\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_{max}}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Que se passe t il pour T lorsque $\theta_{max} \to 0$? et quand $\theta_{max} \to \pi$?

Exercice 4.4.14. *En électricité on s'intéresse à*

$$\begin{cases} L\frac{di}{dt} = v - h(i) \\ C\frac{dv}{dt} = -i, \end{cases}$$

où $L > 0$, $C > 0$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1. On définit l'énergie du système par

$$E(i, v) := \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2).$$

1. *Déterminer l'équilibre et discuter sa stabilité en fonction de $h'(0)$ (qu'on suppose non nul).*

2. *Supposons que h vérifie $xh(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. Montrer que l'équilibre est globalement asymptotiquement stable.*

Exercice 4.4.15. *On considère*

$$\begin{cases} x' = -xy \\ y' = \frac{x^2 - y}{1 + y^2}. \end{cases}$$

1. *Déterminer les équilibres. L'étude de la "stabilité linéaire" suffit elle ?*

2. *A l'aide de $E(x, y) := x^2 + y^2 + \frac{1}{2}y^4$, montrer que toutes les solutions maximales du problème de Cauchy sont globales, et que $(0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.*

Bibliographie

[1] S. Benzoni-Gavage, *Calcul différentiel et équations différentielles*, Dunod, 2010.

[2] F. Boyer, *Agrégation externe de Mathématiques, Equations différentielles ordinaires*, poly disponible sur https ://www.math.univ-toulouse.fr/ fboyer/

[3] R. Danchin, *Cours de calcul différentiel*, Cours de L3 maths, poly disponible sur http ://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/