Université de Montpellier II

M2 Mathématiques et Applications — Examen d'EDP, 2013-2014

Notes de cours autorisées.

Exercice 1 *(Une équation homogène en domaine borné)*

1. On considère le problème de Cauchy

$$\frac{dy}{dt} = y(y-1) \quad t > 0, \quad y(0) = \alpha.$$

(i) Quels sont les équilibres ? Sont ils stables (un schéma sera apprécié) ?
(ii) Résoudre le problème pour $\alpha < 0$ puis pour $\alpha \in (0,1)$.

2. On considère le problème parabolique

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u(u-1) & \text{dans} \quad (0,\infty) \times \Omega\,, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{dans} \quad \bar{\Omega}\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad (0,\infty) \times \partial\Omega\,. \end{cases}$$

On suppose que la condition initiale u_0 est continue sur $\bar{\Omega}$ et que, pour tout $x \in \bar{\Omega}$,

$$-2 \leq u_0(x) \leq 1 - \varepsilon\,,$$

pour un certain $\varepsilon \in (0,1)$ fixé.
(i) Montrer que la solution locale du problème est en fait globale.
(ii) Montrer que cette solution $u(t,x)$ converge vers 0 lorsque $t \to \infty$, et ce uniformément en $x \in \Omega$.

Exercice 2 *(Une équation hétérogène sur $\mathbb{R}$)*
On considère le modèle suivant en dynamique des populations :

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u + (1 - Ax^2 - u)u & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Ici, A est un paramètre strictement positif et la condition initiale u_0 est supposée continue, positive et bornée sur $\mathbb{R}$.

1. En quelques mots, comment comprenez vous ce modèle ? Formellement que se passe t il quand $A \to 0$? Pour la survie de la population, vaut il mieux $A << 1$ ou $A >> 1$?
2. On définit l'opérateur linéarisé en $u \equiv 0$ par

$$\mathcal{L}\psi := -\partial_{xx}\psi - (1 - Ax^2)\psi,$$

agissant sur les fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Déterminer une constante β (en fonction de A) pour que la gaussienne $\phi(x) = e^{-\beta x^2/2}$ soit une fonction propre de $\mathcal{L}$. Déterminer la valeur propre λ (en fonction de A) associée.

3. On suppose ici que $\lambda > 0$. On suppose également dans cette question que u_0 est à support compact. Montrer que, pour $M > 0$ assez grand, on a

$$0 \leq u(t,x) \leq M\phi(x)e^{-\lambda t}.$$

Que dire du comportement en temps long du problème de Cauchy (1) ?

4. On suppose ici que $\lambda < 0$. On suppose également dans cette question que $u_0 > 0$ sur $\mathbb{R}$.
(i) Pour $R > 0$ on note $(\lambda_R, \phi_R(x))$ le couple valeur propre principale/fonction propre associée pour l'opérateur $\mathcal{L}$ agissant sur les fonction définies sur $(-R, R)$ avec conditions de Dirichlet. On a donc

$$\begin{cases} -\partial_{xx}\phi_R - (1 - Ax^2)\phi_R = \lambda_R \phi_R & \text{sur } (-R, R), \\ \phi_R = 0 & \text{en } \pm R, \\ \phi_R > 0 & \text{sur } (-R, R), \end{cases}$$

avec la normalisation $\|\phi_R\|_\infty = 1$. Montrer que $\lambda_R \geq \lambda$. On admet alors que

$$\lambda_R \searrow \lambda, \quad \text{quand } R \to \infty.$$

(ii) Montrer que, pour $R > 0$ assez grand, $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$\varepsilon \phi_R(x) \leq u(t, x).$$

Que dit ce résultat sur la population ?

Exercice 3 *(Sur la vitesse des fronts Fisher-KPP)*
On se donne $u > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $c \geq 0$ tels que

$$u'' + cu' + u(1 - u) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

On suppose que $0 \leq c < 2$ et on va montrer qu'on ne peut pas avoir $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$ (ce qui montrera qu'un front Fisher-KPP ne peut exister que si $c \geq 2$).

1. Comme $0 \leq c < 2$, on peut choisir $0 < \lambda < 1$ tel que $c^2 - 4\lambda < 0$. Construire alors $\varphi : [-\frac{\pi}{\sqrt{4\lambda - c^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{4\lambda - c^2}}] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \varphi'' + c\varphi' + \lambda\varphi = 0 & \text{sur } (-\frac{\pi}{\sqrt{4\lambda - c^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{4\lambda - c^2}}), \\ \varphi = 0 & \text{en } \pm \frac{\pi}{\sqrt{4\lambda - c^2}}, \\ \varphi > 0 & \text{sur } (-\frac{\pi}{\sqrt{4\lambda - c^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{4\lambda - c^2}}), \end{cases}$$

avec la normalisation $\|\varphi\|_\infty = 1$.
2. En raisonnant par l'absurde montrer qu'il existe $x^* \in [-\frac{\pi}{\sqrt{4\lambda - c^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{4\lambda - c^2}}]$ tel que $u(x^*) \geq 1 - \lambda$.
Indication : φ joue le rôle d'une sous-solution pour l'équation linéarisée...
3. Conclure.