M2, EDP et dynamique des populations, Examen 2015

Exercice 1 *(Une équation homogène en domaine borné)*

On considère le problème parabolique

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + e^{-u} & \text{dans} \quad (0,\infty)\times\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{dans} \quad \overline{\Omega} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad (0,\infty)\times\partial\Omega\,. \end{cases}$$

On suppose que la condition initiale u_0 est continue sur $\overline{\Omega}$. Montrer, à l'aide d'une sous solution, que

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} u(t,x) \to +\infty \qquad \text{quand } t\to+\infty.$$

Exercice 2 *(Valeur propre principale généralisée et applications)*

1. **Une autre définition de la valeur propre principale dans une boule.**
On note B_R la boule de $\mathbb{R}^N$ centrée à l'origine et de rayon $R>0$. On se donne une fonction $r\in C^{0,\alpha}(\overline{B_R})$, avec $0<\alpha<1$. On dispose alors d'un couple valeur propre principale-fonction propre associée $(\lambda_R,\phi_R)\in\mathbb{R}\times C^2(\overline{B_R})$ satisfaisant :
$$\begin{cases} -\Delta\phi_R - r(x)\phi_R = \lambda_R\phi_R & \text{dans } B_R \\ \phi_R = 0 & \text{sur } \partial B_R \\ \phi_R > 0 & \text{dans } B_R, \end{cases}$$
avec la normalisation $\|\phi_R\|_\infty = 1$. Maintenant on définit
$$\mu_R := \sup\{\mu, \exists\psi\in C^2(\overline{B_R}), \psi>0 \text{ dans } B_R, \Delta\psi + r(x)\psi + \mu\psi \le 0 \text{ dans } B_R\}.$$
On veut montrer que $\mu_R = \lambda_R$.
(i) Montrer que l'ensemble $\{\mu, \exists\psi\in C^2(\overline{B_R}), \psi>0 \text{ dans } B_R, \Delta\psi + r(x)\psi + \mu\psi \le 0 \text{ dans } B_R\}$ n'est pas vide et que $\lambda_R\le\mu_R\le+\infty$.
(ii) Supposons que $\lambda_R<\mu_R$. Alors il existe $\lambda_R<\mu$ et $\psi\in C^2(\overline{B_R})$, $\psi>0$ dans B_R tels que $\Delta\psi + r(x)\psi + \mu\psi\le 0$ dans B_R. On définit
$$\varepsilon^* := \sup\{\varepsilon>0, \forall x\in\overline{B_R}, \varepsilon\phi_R(x)\le\psi(x)\}.$$
<u>1er cas :</u> on suppose que ψ ne s'annule pas sur le bord de B_R. Montrer que ε^* est un réel bien défini. Montrer alors une absurdité.
<u>2eme cas :</u> on suppose que ψ s'annule en (au moins) un point du bord de B_R. Pourquoi ε^* est il toujours un réel bien défini ? Montrer encore une absurdité.
<u>Conclusion :</u> $\mu_R=\lambda_R$.

2. **Notion de valeur propre principale généralisée.**
On travaille maintenant dans $\mathbb{R}^N$ où on n'a plus la notion de valeur propre principale, c'est pourquoi on va définir une notion de valeur propre principale généralisée : pour $r\in C_b^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ on pose, en s'inspirant de la première question,
$$\mu_\infty := \sup\{\mu, \exists\psi\in C^2(\mathbb{R}^N), \psi>0 \text{ dans } \mathbb{R}^N, \Delta\psi + r(x)\psi + \mu\psi\le 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N\}.$$
(i) Montrer que $-r_{max}\le\mu_\infty\le+\infty$.

(ii) Prenons un réel μ et ψ de classe C^2 et strictement positive tels que $\Delta\psi + r(x)\psi + \mu\psi \leq 0$. En considérant la restriction $\psi_{|\overline{B_R}}$ montrer que $\mu_\infty \leq \mu_R = \lambda_R$.

Dans la suite, on admettra que $\lambda_R \to \mu_\infty$ quand $R \to \infty$ [1].

3. **Application à un problème parabolique.**

On s'intéresse au comportement en temps grand de $u(t,x)$ la solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u(r(x) - u) & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

(i) En quelques mots, expliquer le modèle de dynamique des populations.

(ii) On suppose ici $\mu_\infty > 0$ et u_0 à support compact. En construisant une sur solution, montrer que

$$u(t,x) \to 0 \quad \text{quand } t \to \infty, \text{ localement uniformément en espace.}$$

Que suffirait il pour que cette convergence soit uniforme en espace ? Que dit ce résultat sur la population ?

(iii) On suppose ici $\mu_\infty < 0$ et $u_0 > 0$. Montrer que, pour $R > 0$ assez grand, $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$\varepsilon\phi_R(x) \leq u(t,x).$$

Que dit ce résultat sur la population ?

1. ceci n'a rien d'évident : il faut utiliser une inégalité de Harnack, les estimations intérieures elliptiques, une extraction diagonale...