UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2015-2016**

Dynamique des populations, L3 EBO

Contrôle continu sur les modèles discrets (2h15)

Exercice 1 (Plusieurs populations)

On veut étudier l'évolution d'une population d'insectes. On modélise cette évolution en faisant les hypothèses qui suivent. La population est structurée en trois classes d'âge : les jeunes qui ont moins de 1 an, les adultes entre 1 et 2 ans et les individus âgés de plus de 2 ans. Jusqu'à 3 ans la mortalité est négligeable, puis une fois l'âge de 3 ans atteint, tous les individus meurent rapidement. Entre 0 et 1 an, on estime que chaque individu donne naissance à 1 jeune. Entre 1 et 2 ans, on estime que chaque individu donne naissance à 4 jeunes. Entre 2 et 3 ans les individus deviennent cannibales : entre 2 et 3 ans on estime que chaque individu mange 4 jeunes (ils ne s'attaquent pas aux adultes qui sont trop forts pour eux...).

On observe la population sur des intervalles de 1 an. On note x_n, y_n et z_n les effectifs respectifs des jeunes, des adultes et des individus âgés à l'année n. Par exemple, y_3 est égal au nombre d'individus adultes au bout de 3 années.

1. Justifier le fait que la matrice qui modélise l'évolution des trois classes de la population entre l'année n et l'année $n+1$ est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que $det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4)$.
3. En déduire que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$,$\lambda_3 = -2$.
4. Calculer un vecteur propre non nul X_1, X_2, X_3 associé à chaque valeur propre.
5. En déduire une matrice de passage P, son inverse P^{-1}, et une matrice diagonale D telle que telle que $A = PDP^{-1}$ soit diagonale.
6. En déduire une expression explicite de x_n, y_n, z_n en fonction des conditions initiales x_0, y_0, z_0.

Exercice 2 (Une population)

1. On considère le modèle discret pour une population suivant

$$\begin{cases} w_0 \text{ donné} \\ w_{n+1} = \frac{1}{3} w_n. \end{cases}$$

Quelle est la fonction de croissance f qui permet d'écrire $w_{n+1} = w_n + f(w_n)$? Quel type de croissance est ce ? De quelle type est la suite (w_n) ? Calculer w_n. Quel est le devenir de cette population ?

2. On considère le modèle discret pour une population suivant

$$\begin{cases} q_0 = 1 \\ q_{n+1} = \frac{1}{3} q_n + 2. \end{cases}$$

En un mot que se passe t il par rapport au modèle précédent ? En posant $w_n = q_n - 3$ montrer qu'on se ramène au cas précédent. En déduire q_n. Quel est le devenir de cette population ?

Exercice 3 (Une matrice non diagonalisable...)
On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A admet une valeur propre double que l'on déterminera.
   On ADMET alors que A n'est pas diagonalisable. Malgré cela, on va calculer A^n.
2. Montrer que $A^2 = 8A - 16I$.
3. Montrer que $A^n = n4^{n-1}A - (n-1)4^n I$ pour tout $n \geq 1$.