

Dynamique des populations, L3 EBO**Contrôle continu sur les modèles continus****Exercice 1**

On considère deux populations $x(t)$ et $y(t)$ cohabitant sur un même territoire. On propose le modèle linéaire suivant

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = -x. \end{cases}$$

1. Résoudre ce système (noter que les conditions initiales ne sont pas données). Quel est le devenir des populations $x(t)$ et $y(t)$?

On propose maintenant un modèle avec un apport extérieur pour la population $y(t)$.

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = -x + 2. \end{cases}$$

2. Résoudre ce système (noter que les conditions initiales ne sont pas données). Quel est le devenir des populations $x(t)$ et $y(t)$?

Exercice 2

1. Résoudre le problème linéaire

$$\begin{cases} n'(t) = -n(t) + t \\ n(0) = 1. \end{cases}$$

Que se passe-t-il en temps grand ?

2. On considère une population $p(t)$ suivant le problème non linéaire

$$\begin{cases} p'(t) = p(t)(1 - tp(t)) \\ p(0) = 1. \end{cases}$$

Expliquer l'équation. En posant

$$n(t) = \frac{1}{p(t)},$$

montrer qu'on se ramène à la question précédente. En déduire $p(t)$. Quel est le devenir de cette population ?

Exercice 3

On considère deux populations mesurées par $x(t)$ et $y(t)$. Le modèle est le système différentiel non linéaire

$$\begin{cases} x' = x(2 - x - y) \\ y' = y(1 - y + \beta x), \end{cases}$$

où β est une constante strictement positive.

1. En quelques phrases, expliquer les phénomènes mis en jeu dans ce système.
2. Dans cette question, on suppose β très petit (c.a.d. $\beta \rightarrow 0$ en termes mathématiques). Quel est le devenir des populations $x(t)$ et $y(t)$?
3. Tracer les isoclines et la direction des trajectoires. Quels sont les équilibres ?
4. Etudier la stabilité de l'équilibre $(0, 1)$.
5. Pour l'équilibre plus "subtil" on admet qu'on a (après linéarisation) deux valeurs propres complexes qui sont $-1 + i\sqrt{\frac{\beta}{\beta+1}}$ et $-1 - i\sqrt{\frac{\beta}{\beta+1}}$. Préciser alors les trajectoires au voisinage de l'équilibre. Quel est le devenir des populations $x(t)$ et $y(t)$?