Université de Rouen Normandie **Année 2023-2024**

Contrôle continu

Exercice 1

On note $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie une matrice carrée réelle sur la trace de son carré, c'est à dire

$$f(A) = \text{Tr }(A^2), \text{ pour } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est différentiable en A et, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $df_A(H)$.

Exercice 2

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + y^2.$$
Déterminer les extrema locaux de f.
2. On donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2.$$
Déterminer les extrema locaux de f.

Exercice 3

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$(x^2 + 1)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2xy\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit f une telle fonction. On considère alors $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u, v) = f(u, (u^2 + 1)v).$$

1. "Calculer" $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v)$.
2. En déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par F.
3. Conclure.
4. En repartant de la question 1 (et donc en ignorant les résultats des questions 2 et 3), "calculer" $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u, v)$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(u, v)$ (où on a supposé ici que f est de classe C^2).

Exercice 4

Donner l'allure de

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x^4 + y^3 - y^2 + \frac{1}{2}x - y = 0\}$$

au voisinage du point $(0, 0)$ (tangente ? position par rapport à la tangente ?) et du point $(1, 1)$ (idem). Evidemment faites un dessin !