Université de Rouen Normandie **Année 2024-2025**

Traitement du Signal (L3 méca)

Exercice 1

On considère une barre de longueur $L = \pi$ qui est un conducteur thermique. On cherche à résoudre l'équation de la chaleur pour la fonction $u = u(t, x)$ de deux variables, donnant la température de la barre au temps $t \geq 0$ et à la position $x \in [0, \pi]$. On considère que les bords sont "isolés" c'est à dire

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0. \qquad \text{(NEUMANN)}$$

Le problème complet est donc

$$\begin{cases} \partial_t u = d\,\partial_{xx} u & t > 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < \pi, \\ \partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, \pi) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

où d est une constante de diffusion thermique, et où on suppose que la condition initiale f est positive et vérifie

$$f'(0) = f'(\pi) = 0.$$

1. Par un schéma, prolonger f en une fonction PAIRE et 2π périodique sur $\mathbb{R}$.
2. Ecrire f sous forme de série de Fourier (avec des coefficients notés a_n et b_n).
3. Poser $u(t, x) = \frac{\varphi_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(t) \cos(nx)$. Par l'EDP trouver une EDO pour chacun des φ_n.
4. Conclure.
5. Si $f(x) = 1 + \cos x$, qui est la solution $u(t, x)$? Que se passe t il quand $t \to +\infty$?
6. Montrer que la chaleur "se conserve".

Exercice 2

On se donne un signal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tel que sa transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

1. Que vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$?
2. Calculer $\widehat{f''}(\xi)$.