Université de Montpellier 19 avril 2019
Faculté des Sciences
HLMA 602 Calcul différentiel et équations différentielles

Contrôle continu 2

Durée : 1 heure 30

Documents, calculettes et téléphones portables interdits

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y^2 - x^2y + x^2$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$. Dessiner D et démontrer que f admet un maximum et un minimum sur D.
3. Déterminer le minimum et le maximum de f sur D.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, xy, xyz)$.

1. Déterminer l'ensemble U des points au voisinage desquels f est un difféomorphisme local.
2. Prouver que f induit un difféomorphisme global de U sur $f(U)$.
3. Déterminer $f(U)$.

Exercice 3 Démontrer que la relation $x + y + z + \sin(xyz) = 0$ définit z comme fonction f de x et de y au voisinage du point $(0, 0, 0)$. Calculer alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ au voisinage de ce point.

Exercice 4 On étudie sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle (E) $t^2x''(t) + tx'(t) - x(t) = \frac{1}{t}$. Résoudre, en utilisant le changement de variable $t = e^u$, le problème de Cauchy pour (E) avec la condition initiale : $x(1) = 1$ et $x'(1) = 0$.

Exercice 5 Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = & 6x & +3y & -3t \\ y' = & -4x & -y & +4t \end{cases}$

Exercice 6 Pour $x_0 \in \mathbb{R}_+$, on s'intéresse à l'équation différentielle (E') : $\begin{cases} x' & = & x^2(1 - e^x) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$

Montrer (en distinguant les cas $x_0 = 0$ et $x_0 > 0$) que (E') admet une solution définie sur un intervalle maximal $]a, +\infty[$ ($a < 0$ ou $= -\infty$) et que la limite de x en $+\infty$ est nulle.