UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2018-2019**

Examen final HLMA602 (3h)
CALCUL DIFFERENTIEL ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES
(pas de document, pas de calculatrice, pas de téléphone...)

Exercice 1

1. On considère une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Donner la définition de "f est différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$".
2. On considère une matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \langle Ax, x \rangle ,$$
où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire canonique. Montrer que f est différentiable en tout $x \in \mathbb{R}^n$ et préciser $df_x(h)$ pour $h \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 2

On se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et on définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par
$$g(x, y) = f\left(f(x, y), y\right).$$

1. Calculer les dérivées partielles de g, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$, en fonction des dérivées partielles de f.
2. On suppose
$$f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0.$$
On définit l'ensemble
$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}.$$
Trouver un point (x_0, y_0) dans Γ. Montrer que, au voisinage de ce point, les points de Γ sont décrits par $y = \varphi(x)$ où φ est de classe C^1 sur un voisinage ouvert de 0. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $\varphi(x)$ au voisinage de x_0.

Exercice 3

Résoudre les deux problèmes de Cauchy suivants (en n'oubliant pas d'indiquer l'intervalle associé à la solution maximale)

1. $\begin{cases} x' = e^t x + 1 - te^t \\ x(0) = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = \frac{e^t}{x} \\ x(0) = 1. \end{cases}$

Exercice 4

Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour les solutions $(x(t), y(t))$ du système

$$\begin{cases} x' = & y \\ y' = -2x - 3y \end{cases}$$

lorsque $t \to +\infty$?

Exercice 5

On considère le problème

$$\begin{cases} x' = t - x^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution maximale. On note $]T_{min}, T_{max}[$ son intervalle de définition, avec $-\infty \leq T_{min} < 0 < T_{max} \leq +\infty$.
2. On suppose $T_{min} = -\infty$. Montrer que, pour $t \leq -1$,

$$\frac{x'(t)}{1 + x^2(t)} \leq -1.$$

   Intégrer cette inégalité entre $T \leq -1$ et -1, puis prendre la limite $T \to -\infty$. Qu'en déduire ?
3. On suppose $T_{max} < +\infty$.
   a) Que vaut $x'(0)$?
   b) Supposons que x' ne s'annule pas sur $[0, T_{max}[$. Montrer que x est décroissante et minorée sur $[0, T_{max}[$ et en déduire une absurdité. Ainsi il existe $t_0 \in]0, T_{max}[$ tel que $x'(t_0) = 0$.
   c) En dérivant l'équation différentielle, montrer que tout point critique est un minimum local strict.
   d) En déduire que

$$\forall t \in]t_0, T_{max}[, x'(t) > 0.$$

   Montrer que x est majorée au voisinage de T_{max} et en déduire une absurdité.