M1 — Equation replicator-mutator

Ici, on considère, au temps $t > 0$, une densité d'individus $u = u(t, x)$ structurée en trait phénotypique $x \in \mathbb{R}^N$ (par exemple la taille, la capacité à résister à des antibiotiques etc). Les “déplacements” dans l'espace $\mathbb{R}^N$ correspondent à des mutations (d'un trait vers un autre) et sont modélisés par le Laplacien. D'autre part, à chaque trait x correspond une *fitness* (ou *valeur sélective*) $W(x)$ qui mesure la capacité à se reproduire. C'est une notion essentielle en biologie évolutive qui permet, notamment, de “mesurer” la sélection naturelle. On considère donc, pour l'instant, le modèle :

$$\partial_t u = \underbrace{\Delta u}_{\text{mutations}} + \underbrace{W(x)u}_{\text{réplication}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

1 Tous les individus ont la même fitness

On prend ici $W(x) = cste = r$ et on considère donc

$$\partial_t u = \Delta u + ru, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N.$$

Dans ce cas simple “fitness constante”, on s'attend à ce qu'il n'y ait pas de sélection.

1. Montrer que $u(t, x) = e^{rt}v(t, x)$ où $v = v(t, x)$ est solution d'une EDP qu'on a déjà vue.
2. En déduire que le signe de r décide du devenir de la population.
3. Que vaut la population totale
$$m(t) := \int_{\mathbb{R}^N} u(t, x)dx \tag{2}$$
au cours du temps ?

2 Equation sur les fréquences

A partir de maintenant u n'est plus une densité mais une fréquence et on considère l'équation *replicator-mutator*

$$\boxed{\partial_t u = \Delta u + u(W(x) - \overline{W}(t)), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N,} \tag{3}$$

où

$$\boxed{\overline{W}(t) := \int_{\mathbb{R}^N} W(y)u(t, y)dy \ \text{ est la fitness moyenne.}}$$

La donnée initiale u_0 est une densité de probabilité.

1. En intégrant formellement (3), montrer que $m(t) = 1$ pour tout $t > 0$.

Ainsi (on admet que la solution reste positive),

$$\boxed{\text{pour tout } t \geq 0,\ u(t, \cdot) \text{ est une densité de probabilité.}}$$

Dans la suite, pour simplifier on suppose $N = 1$.

3 Fitness linéaire

On considère ici $W(x) = x$ et donc

$$\partial_t u = \partial_{xx} u + u(x - \overline{x}(t)), \quad \overline{x}(t) := \int_{\mathbb{R}} xu(t, x)dx. \tag{4}$$

On décide de chercher des solutions sous la forme gaussienne :

$$u(t,x) := \sqrt{\frac{a(t)}{2\pi}} e^{-\frac{a(t)}{2}(x-m(t))^2}, \tag{5}$$

où $a(t)$, $m(t)$ sont à déterminer avec $a(0) = a_0 > 0$ donné et $m(0) = m_0$ donné.

1. En insérant l'ansatz (5) dans l'EDP (4), montrer qu'on obtient trois équations différentielles portant sur $a = a(t)$ et $m = m(t)$.
2. Les résoudre.
3. Que dire du comportement en temps grand ? Montrer qu'on a **"fuite à l'infini" et "aplatissement"**. Etait ce "prévisible" ?...

4 Fitness quadratique confinante

On considère ici $W(x) = -x^2$ et donc

$$\partial_t u = \partial_{xx} u + u(-x^2 - \overline{-x^2}(t)), \quad \overline{-x^2}(t) := \int_{\mathbb{R}} -y^2 u(t,y)dy. \tag{6}$$

1. Reprendre l'analyse gaussienne de la section précédente. Montrer qu'on a **convergence vers un état stationnaire gaussien.**

5 Petit formulaire sur les gaussiennes

La densité de probabilité de la loi normale d'espérance m et d'écart type σ est donnée par

$$u(x) := \sqrt{\frac{a}{2\pi}} e^{-\frac{a}{2}(x-m)^2},$$

où $a = \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{V}$ est l'inverse de la variance. En particulier

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} xu(x)dx = m, \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 u(x)dx = \frac{1}{a} + m^2.$$