Université de Rouen Normandie **Année 2022-2023**

Contrôle continu Analyse Fonctionnelle M1

Exercice 1

On travaile dans $E = C^0([0;\pi];\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On fixe $\varphi \in E$ et on considère $T : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$T(f) = \int_0^\pi f(t)\varphi(t)\,dt, \qquad \text{pour } f \in E.$$

1. Montrer que T est une application linéaire et continue.
2. Calculer $\|T\|$ quand φ est une fonction positive.
3. Calculer $\|T\|$ quand $\varphi = \cos$.

Exercice 2 (Baire...)

Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathbb{R}[X]$ qui en fasse un espace de Banach. On pourra raisonner par l'absurde et considérer

$$F_n := \{P \in \mathbb{R}[X] : \ \deg P \le n\}.$$

Exercice 3

Soit $1 < p < +\infty$. Soit $f \in L^p(]0,+\infty[)$. Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Le but est de montrer que $F \in L^p(]0,+\infty[)$ et que

$$\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p. \tag{1}$$

1. Dans cette question on suppose que $f \in C_c(]0,+\infty[)$.
   a) Montrer que $F \in C^1(]0,+\infty[)$ et que

   $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad xF'(x) = -F(x) + f(x).$$

   b) Supposons ici $f \ge 0$ sur $]0,+\infty[$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties (sur $[\varepsilon, R]$ dans un premier temps), que

   $$\int_0^{+\infty} F^p(x)\,dx = \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} F^{p-1}(x)f(x)\,dx.$$

   Montrer (1).
   c) On ne suppose plus la positivité de f. Montrer (1).
2. Montrer que si $f_n \to f$ dans L^p alors $F_n(x) \to F(x)$ p.p.
3. Montrer (1) pour $f \in L^p(]0,+\infty[)$ (on ne suppose plus ici que $f \in C_c(]0,+\infty[)$).