Université de Rouen Normandie **Année 2023-2024**

Analyse Fonctionnelle M1

Exercice 1
Soit f et g dans $L^3(\mathbb{R})$. Montrer que $f^2 g \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 2
Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. Soit X un sous-espace vectoriel fermé de E dont tous les éléments sont de classe C^1 sur $[0,1]$. On définit:

$$\begin{aligned} T: \quad & X \to E \\ & f \mapsto f'. \end{aligned}$$

1. Montrer que le graphe de T est fermé.
2. En déduire qu'il existe $N \geq 1$ tel que: $\forall f \in X, \|f\|_\infty \leq 1 \Longrightarrow \|f'\|_\infty \leq N$.
3. Pour $0 \leq k \leq N$ on définit $x_k = \frac{k}{N}$. On définit:

$$\begin{aligned} S: \quad & X \to \mathbb{R}^{N+1} \\ & f \mapsto (f(x_0), \cdots, f(x_N)). \end{aligned}$$

3a. On suppose $\|f\|_\infty = 1$ et $S(f) = 0$. Montrer que cela est absurde (un schéma et les AF pourront aider!).

3b. En déduire que X est de dimension finie, et au plus $N+1$.

Exercice 3
Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 < p < +\infty$.

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est bien défini et que

$$F(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{p-1}{p}}), \text{ quand } x \to +\infty.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. A l'aide la CV dominée, montrer qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|^p dt \leq \varepsilon.$$

3. Montrer que

$$F(x) = o(x^{\frac{p-1}{p}}), \text{ quand } x \to +\infty.$$