Université de Rouen Normandie **Année 2024-2025**

Analyse Fonctionnelle M1

Exercice 1

On travaille dans $E = C^0([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On considère

$$\begin{array}{rcl} T : E & \to & E \\ f & \mapsto & T(f), \end{array}$$

où $T(f)$ est donnée par

$$\begin{array}{rcl} T(f) : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & T(f)(x) := \displaystyle\int_0^1 \min(x,y) f(y) dy. \end{array}$$

1. Montrer que
$$T(f)(x) = \int_0^x y f(y) dy + x \int_x^1 f(y) dy.$$
En déduire $T(f)$ est de classe C^1 sur $[0,1]$. Que vaut $T(f)'(x)$?
2. Montrer que T est linéaire, continu et calculer sa norme.
3. Montrer que T est compact. <u>Indication :</u> Ascoli.
4. Montrer que T est injectif.
5. Montrer que T n'est pas surjectif.
6. On se donne $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Discuter l'existence de $f \in E$ non nulle telle que $T(f) = \lambda f$.

Exercice 2

On travaille dans $E = C^0([0,1] : \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

1. Montrer que
$$A := \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$$
est un ouvert convexe non vide de E.
2. Montrer que
$$B := \{f \in E : \forall n \in \mathbb{N}^*, f(1/n) = -1/n\}$$
est un fermé convexe non vide de E.
3. En déduire qu'il existe φ une forme linéaire continue sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall f \in A, \forall g \in B, \varphi(f) \geq \alpha \geq \varphi(g).$$
4. Montrer que, pour tout $f \in A$, $\varphi(f) \geq 0$.