M2 — EDP en dynamique des populations, 2020-2021

Notes de cours autorisées.
Par défaut, les notations sont celles du cours : $G = G(t,x)$ désigne le noyau de la chaleur... etc...

Exercice 1 *(Comportement asymptotique de l'équation de la chaleur en dimension $N = 1$)*
On se donne u_0 continue à support compact sur $\mathbb{R}$, et on note

$$m := \int_{\mathbb{R}} u_0(y)dy.$$

On note $u = u(t,x)$ la solution de l'équation de la chaleur partant de u_0. On souhaite prouver que

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}} \|u(t,\cdot) - mG(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0,$$

montrant ainsi que le comportement en temps grand est bien décrit par le noyau de la chaleur.

1. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in \mathbb{R}$, tout $t > 0$,
$$\left| e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{x^2}{4t}} \right| \leq C \frac{|y|}{\sqrt{t}}.$$
2. Ecrire $u(t,x) - mG(t,x)$ sous la forme d'une intégrale.
3. Montrer qu'il existe une constante $K = K(u_0) \geq 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $t > 0$,
$$|u(t,x) - mG(t,x)| \leq \frac{K}{t}.$$
Conclure.

Exercice 2 *(Fisher-KPP en dimension $N = 1$ et domaine borné)*
Pour $R > 0$, on s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u + u(1-u) & t > 0,\, x \in (-R,R), \\ u(t,x) = 0 & x = \pm R, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (-R,R). \end{cases}$$

1. Proposer (aucune justification n'est demandée) un problème de valeur propre principale/fonction propre associée $(\lambda_R, \phi_R = \phi_R(x))$ qui "rende compte" de la survie ou de l'extinction dans le problème de Cauchy ci-dessus.
2. Montrer qu'il existe $R^* > 0$ (à déterminer) tel que
$$R < R^* \Rightarrow \lambda_R > 0 \quad \text{et} \quad R > R^* \Rightarrow \lambda_R < 0.$$
3. En une phrase résumer ce que "dit le modèle".

Exercice 3 *(Vitesse d'invasion dans Fisher-KPP en dimension $N = 1$)*
Pour $0 \le u_0 \le 1$ (non triviale) continue et à support compact sur $\mathbb{R}$, on considère la solution $u = u(t,x)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u + u(1-u) & t > 0,\, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Par comparaison, on sait que

$$0 < u(t,x) \le 1, \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. On souhaite montrer que la solution "voyage vers la droite" au plus à vitesse $c^* := 2$, c'est à dire

$$\forall c' > c^*,\ \lim_{t \to +\infty} \sup_{x \ge c't} |u(t,x)| = 0. \tag{1}$$

Soit $c' > c^*$ et fixons c tel que $c' > c > c^*$.
(i) Montrer qu'on peut trouver $\lambda > 0$ tel que, pour tout $A > 0$, $w(t,x) := Ae^{-\lambda(x-ct)}$ vérifie l'équation linéaire

$$\partial_t w - \partial_{xx} w - w = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

En déduire que, pour tout $A > 0$, w est une sur solution de l'équation non linéaire de Fisher-KPP.
(ii) En déduire que, pour $A > 0$ bien choisi, on a

$$0 \le u(t,x) \le Ae^{-\lambda(x-ct)},$$

et conclure.

2. On souhaite montrer que la solution "voyage vers la droite" au moins à vitesse $c^* := 2$, c'est à dire

$$\forall 0 < c < c^*,\ \lim_{t \to +\infty} \inf_{x \le ct} |1 - u(t,x)| = 0. \tag{2}$$

On se donne donc $0 < c < c^* = 2$. On choisit $\rho > 0$ suffisamment petit pour que $0 < c < 2\sqrt{1-\rho}$.
(i) Montrer que

$$f(u) = u(1-u) \ge (1-\rho)u,\ \forall 0 \le u \le \rho.$$

(ii) On considère $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$) racine complexe de

$$\lambda^2 - c\lambda + 1 - \rho = 0,$$

et on essaie de construire une sous solution à support compact :

$$w(t,x) = \begin{cases} \varepsilon \cos(\beta(x-ct))e^{-\alpha(x-ct)} & \text{si } |x-ct| \le \frac{\pi}{2\beta} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer qu'on peut choisir $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$0 \le w(t,x) \le \rho,\ \forall t \ge 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

En déduire que, dans la zone où $w(t,x) > 0$, on a

$$\partial_t w - \partial_{xx} w - w(1-w) \le 0.$$

(iii) Montrer que, quitte à réduire $\varepsilon > 0$, on a

$$w(t,x) \le u(1+t,x),\ \forall t \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

En déduire que

$$\liminf_{t \to +\infty} u(1+t, ct) \ge \varepsilon.$$

Ce n'est pas encore (2) mais on s'arrête là...